PENDUGAAN PARAMETER DERET WAKTU *HIDDEN* MARKOV DUA WAKTU SEBELUMNYA

B. SETIAWATY DAN S. F. NIKMAH

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680 Indonesia

Abstrak: Pendugaan parameter deret waktu *Hidden* Markov dua waktu sebelumnya dilakukan mengunakan Metode *Maximum Likelihood* dan pendugaan ulang menggunakan metode *Expectation Maximization*. Dari kajian ini diperoleh algoritma untuk menduga parameter model.

Kata kunci: Rantai Markov, *Hidden* Markov, Deret waktu *Hidden* Markov, Metode *Expectation Maximization*.

1. PENDAHULUAN

Tulisan ini merupakan kajian tentang pendugaan parameter untuk deret waktu *Hidden* Markov dua waktu sebelumnya. Pendugaan parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood* dan pendugaan ulangnya menggunakan metode *Expectatition Maximization* (Metode EM). Dari kedua metode tersebut kemudian diturunkan suatu algoritma yang dapat dipakai secara umum untuk menduga parameter model deret waktu *Hidden* Markov dua waktu sebelumnya.

Tulisan ini dimulai dengan definisi model deret waktu *Hidden* Markov dua waktu sebelumnya beserta sifat-sifatnya. Pada bagian 3 dibahas Pendugaan Parameter model dan terakhir pada bagian 4 dibahas pendugaan ulang parameter dan algoritmanya.

2. MODEL DERET WAKTU *HIDDEN* MARKOV DUA WAKTU SEBELUMNYA

Pasangan proses stokastik $\{(X_k, Y_k); k \in \aleph\}$ yang terdefinisi pada ruang peluang (Ω, F, P) dan mempunyai nilai pada $S \times Y$ disebut model *hidden*

Markov apabila $\{X_k\}$ adalah rantai Markov dengan *state* berhingga dan diasumsikan bahwa rantai Markov $\{X_k\}$ tidak diamati. Sehingga $\{X_k\}$ tersembunyi (*hidden*) di balik proses observasi $\{Y_k\}$. Banyaknya elemen dari *S* disebut ukuran (orde) dari model *hidden* Markov.

Pada bagian ini dibahas model *hidden* Markov yang merupakan deret waktu yang mempertimbangkan dua waktu sebelumnya dan berbentuk:

$$Y_t - \mu_{X_t^*} = \phi_1\left(Y_{t-1} - \mu_{X_{t-1}^*}\right) + \phi_2\left(Y_{t-2} - \mu_{X_{t-2}^*}\right) + \varepsilon_t \tag{2.1}$$

di mana:

- $\{\varepsilon_t\}$ adalah barisan peubah acak yang saling bebas dan menyebar normal $N(0,\ \sigma^2)$.
- $\{Y_t\}$ adalah proses yang diamati dan bernilai skalar
- $\left\{X_t^*\right\}$ adalah rantai Markov dengan ruang *state* $S^* = \{1,2\}$ dan $P^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix}$ merupakan matriks peluang transisinya, dengan $p_{ji}^* = P(X_t^* = j \mid X_{t-1}^* = i)$
- $\mu(X_t^*) = \left\langle \mu, X_t^* \right\rangle = \mu_{X_t^*}$, dengan $\langle .,. \rangle$ menyatakan hasil kali dalam di R^N.
- $\mu_1,\ \mu_2,\ \phi_1$ dan ϕ_2 adalah konstanta real.

Perhatikan bahwa model ini dicirikan oleh parameter $\theta = \left(\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \sigma^2\right)$. Dengan menggunakan metode EM akan diduga parameter $\theta = \left(\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \sigma^2\right)$ dari data *Y*.

Dalam kasus ini Y_t tidak hanya bergantung pada X_t^* tetapi juga bergantung pada X_{t-1}^* dan X_{t-2}^* sehingga agar tetap memenuhi sifat Markov perlu didefinisikan proses baru X_t di mana

$$\begin{aligned}
&X_t = 1,\ \text{jika } X_t^* = 1,\ X_{t-1}^* = 1 \text{ dan } X_{t-2}^* = 1\\
&X_t = 2,\ \text{jika } X_t^* = 1,\ X_{t-1}^* = 2 \text{ dan } X_{t-2}^* = 1\\
&X_t = 3,\ \text{jika } X_t^* = 2,\ X_{t-1}^* = 1 \text{ dan } X_{t-2}^* = 1\\
&X_t = 4,\ \text{jika } X_t^* = 2,\ X_{t-1}^* = 2 \text{ dan } X_{t-2}^* = 1\\
&X_t = 5,\ \text{jika } X_t^* = 1,\ X_{t-1}^* = 1 \text{ dan } X_{t-2}^* = 2\\
&X_t = 6,\ \text{jika } X_t^* = 1,\ X_{t-1}^* = 2 \text{ dan } X_{t-2}^* = 2\\
&X_t = 7,\ \text{jika } X_t^* = 2,\ X_{t-1}^* = 1 \text{ dan } X_{t-2}^* = 2\\
&X_t = 8,\ \text{jika } X_t^* = 2,\ X_{t-1}^* = 2 \text{ dan } X_{t-2}^* = 2.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Lemma 2.1:

$\{X_t\}$ merupakan rantai Markov dengan ruang state $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dan matriks peluang transisi P sebagai berikut.

$$P=\begin{bmatrix} p_{11}^{*} & 0 & 0 & 0 & p_{11}^{*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{12}^{*} & 0 & 0 & 0 & p_{12}^{*} & 0 \\ p_{21}^{*} & 0 & 0 & 0 & p_{21}^{*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{22}^{*} & 0 & 0 & 0 & p_{22}^{*} & 0 \\ 0 & p_{11}^{*} & 0 & 0 & 0 & p_{11}^{*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{12}^{*} & 0 & 0 & 0 & p_{12}^{*} \\ 0 & p_{21}^{*} & 0 & 0 & 0 & p_{21}^{*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{22}^{*} & 0 & 0 & 0 & p_{22}^{*} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Bukti: Lihat Setiawaty (2007)

Selanjutnya karena $\varepsilon_t \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ bebas stokastik identik maka dapat diperoleh fungsi sebaran bagi ε_t sebagai berikut.

$$F_{\varepsilon_t}\left(y_t\right)=P\left(\varepsilon_t \le y_t\right)=\int_0^{y_t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{\frac{-\left(\varepsilon_t-0\right)^2}{2\sigma^2}\right\}d\varepsilon_t=\int_0^{y_t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{\frac{-\left(\varepsilon_t\right)^2}{2\sigma^2}\right\}d\varepsilon_t . \tag{2.4}$$

Berdasarkan persamaan (2.4) diperoleh fungsi sebaran bagi Y_t

$$\begin{aligned} F_{Y_t}\left(y_t\right) &= P\left(Y_t \le y_t\right) \\ &= P\left(\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_{X_{t-1}^*}\right)+\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_{X_{t-2}^*}\right)+\mu_{X_t^*}+\varepsilon_t \le y_t\right) \\ &= P\left(\varepsilon_t \le \left(y_t-\mu_{X_t^*}\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_{X_{t-1}^*}\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_{X_{t-2}^*}\right)\right). \end{aligned}$$

Misalkan

$$v=\left(y_t-\mu_{X_t^*}\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_{X_{t-1}^*}\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_{X_{t-2}^*}\right)$$

maka

$$F_{Y_t}\left(y_t\right)=\int_0^{v}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{\frac{-\left(\varepsilon_t\right)^2}{2\sigma^2}\right\}d\varepsilon_t$$

dan

$$\begin{aligned} f_{Y_t}\left(y_t\right) &= \frac{\partial}{\partial y_t}F_{Y_t}\left(y_t\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(v\right)^2}{2\sigma^2}\right\}\frac{\partial v}{\partial y_t} \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(\left(y_t-\mu_{X_t^*}\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_{X_{t-1}^*}\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_{X_{t-2}^*}\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Misalkan $\{\Upsilon_t\}$ adalah medan-σ yang dibangun oleh $\{Y_0, Y_1, ..., Y_t\}$. Karena $\{X_t\}$ merupakan rantai Markov 8-*state* maka terdapat 8 fungsi kerapatan peluang bagi $\{Y_t\}$. Kumpulan fungsi kerapatan peluang tersebut dilambangkan dengan η_t.

$$\eta_t = \begin{bmatrix} f\left(y_t \mid X_t = 1, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \\ f\left(y_t \mid X_t = 2, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \\ f\left(y_t \mid X_t = 3, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \\ f\left(y_t \mid X_t = 4, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \\ f\left(y_t \mid X_t = 5, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \\ f\left(y_t \mid X_t = 6, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \\ f\left(y_t \mid X_t = 7, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \\ f\left(y_t \mid X_t = 8, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{\left((y_t - \mu_1) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_1) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_1)\right)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{\left((y_t - \mu_1) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_2) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_1)\right)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{\left((y_t - \mu_2) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_1) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_1)\right)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{\left((y_t - \mu_2) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_2) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_1)\right)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{\left((y_t - \mu_1) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_1) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_2)\right)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{\left((y_t - \mu_1) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_2) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_2)\right)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{\left((y_t - \mu_2) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_1) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_2)\right)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{\left((y_t - \mu_2) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_2) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_2)\right)^2}{2\sigma^2} \right\} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Misalkan $\hat{\xi}_{t|t-1}$ melambangkan vektor (8×1) di mana elemen ke-j pada vektor merepresentasikan $P\{X_t = j \mid \Upsilon_{t-1};\theta\}$ dan $\otimes$ me-lambangkan perkalian elemen per elemen, maka

$$\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t = \begin{bmatrix} P\{X_t = 1 \mid \Upsilon_{t-1};\theta\} \\ P\{X_t = 2 \mid \Upsilon_{t-1};\theta\} \\ P\{X_t = 3 \mid \Upsilon_{t-1};\theta\} \\ P\{X_t = 4 \mid \Upsilon_{t-1};\theta\} \\ P\{X_t = 5 \mid \Upsilon_{t-1};\theta\} \\ P\{X_t = 6 \mid \Upsilon_{t-1};\theta\} \\ P\{X_t = 7 \mid \Upsilon_{t-1};\theta\} \\ P\{X_t = 8 \mid \Upsilon_{t-1};\theta\} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} f\left(y_t \mid X_t = 1, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \\ f\left(y_t \mid X_t = 2, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \\ f\left(y_t \mid X_t = 3, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \\ f\left(y_t \mid X_t = 4, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \\ f\left(y_t \mid X_t = 5, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \\ f\left(y_t \mid X_t = 6, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \\ f\left(y_t \mid X_t = 7, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \\ f\left(y_t \mid X_t = 8, \Upsilon_{t-1};\theta\right) \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Misalkan $\mathbf{1}' = (1,1,1,1,1,1,1,1)$, maka

$$f(y_t \mid Y_{t-1};\theta) = \mathbf{1}'\left(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t\right)$$

$$\begin{aligned}
= \; & P(X_t = 1 \mid Y_{t-1};\theta).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left((y_t-\mu_1)-\phi_1(Y_{t-1}-\mu_1)-\phi_2(Y_{t-2}-\mu_1)\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
& + P(X_t = 2 \mid Y_{t-1};\theta).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left((y_t-\mu_1)-\phi_1(Y_{t-1}-\mu_2)-\phi_2(Y_{t-2}-\mu_1)\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
& + P(X_t = 3 \mid Y_{t-1};\theta).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left((y_t-\mu_2)-\phi_1(Y_{t-1}-\mu_1)-\phi_2(Y_{t-2}-\mu_1)\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
& + P(X_t = 4 \mid Y_{t-1};\theta).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left((y_t-\mu_2)-\phi_1(Y_{t-1}-\mu_2)-\phi_2(Y_{t-2}-\mu_1)\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
& + P(X_t = 5 \mid Y_{t-1};\theta).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left((y_t-\mu_1)-\phi_1(Y_{t-1}-\mu_1)-\phi_2(Y_{t-2}-\mu_2)\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
& + P(X_t = 6 \mid Y_{t-1};\theta).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left((y_t-\mu_1)-\phi_1(Y_{t-1}-\mu_2)-\phi_2(Y_{t-2}-\mu_2)\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
& + P(X_t = 7 \mid Y_{t-1};\theta).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left((y_t-\mu_2)-\phi_1(Y_{t-1}-\mu_1)-\phi_2(Y_{t-2}-\mu_2)\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
& + P(X_t = 8 \mid Y_{t-1};\theta).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left((y_t-\mu_2)-\phi_1(Y_{t-1}-\mu_2)-\phi_2(Y_{t-2}-\mu_2)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk memilih nilai awal bagi $\hat{\xi}_{t|t-1}$ adalah dengan membuat $\hat{\xi}_{1|0}$ sama dengan vektor dari peluang tak bersyarat $\pi = [\pi_i]'$ yang memenuhi sifat *ergodic*, yaitu $\pi = P\pi$ dan $\sum_{i=1}^{8}\pi_i = 1$.

Perhatikan bahwa

$$P(X_t = j \mid Y_t,\theta) = \frac{P(y_t, X_t = j \mid Y_{t-1},\theta)}{f(y_t \mid Y_{t-1},\theta)}$$

sehingga $\hat{\xi}_{t|t} = \dfrac{\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t}{1'\left(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t\right)}$, selain itu $\hat{\xi}_{t+1|t} = P\hat{\xi}_{t|t}$ dan $\hat{\xi}_{t+m|t} = P^m\hat{\xi}_{t|t}$.

3. PENDUGAAN PARAMETER

Penduga $\hat{\theta}$ diperoleh dengan memaksimumkan fungsi log *likelihood*

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^{T}\log f\left(y_t \mid Y_{t-1};\theta\right).$$

Dengan membuat turunan pertama dari fungsi log *likelihood* terhadap parameter θ sama dengan nol maka berdasarkan persamaan 2.8 diperoleh penduga parameter $\hat{\theta}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 = & \frac{1}{\sum_{t=2}^{T}\left[Ap^2 + Br^2 + Cs^2 + D\hat{\phi}_2{}^2 + Eq^2 + F + G\hat{\phi}_1\right]}\left\{\sum_{t=2}^{T}\left[Apz\right.\right. \\ & + B\left(rz + r\hat{\phi}_1\hat{\mu}_2\right) - C\left(sz - s\hat{\mu}_2\right) - D\left(\hat{\phi}_2 z - \hat{\phi}_2 q\hat{\mu}_2\right) \\ & \left.\left. + E\left(qz + q\hat{\phi}_2\hat{\mu}_2\right) + F\left(z + s\hat{\mu}_2\right) - G\left(\hat{\phi}_1 z + \hat{\phi}_1 r\hat{\mu}_2\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_2 = & \frac{1}{\sum_{t=2}^{T}\left[B\hat{\phi}_1^2 + C + Dq^2 + E\hat{\phi}_2^2 + Fs^2 + Gr^2 + H\,p^2\right]}\left\{\sum_{t=2}^{T}\left[-B\left(\hat{\phi}_1 z - \hat{\phi}_1 r\hat{\mu}_1\right)\right.\right. \\ & + C\left(z + s\hat{\mu}_1\right) + D\left(qz + q\hat{\phi}_2\hat{\mu}_1\right) - E\left(\hat{\phi}_2 z - \hat{\phi}_2 q\hat{\mu}_1\right) - F\left(sz - s\hat{\mu}_1\right) \\ & \left.\left. + G\left(rz + \hat{\phi}_1 r\hat{\mu}_1\right) + H\left(pz\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1 = & \frac{1}{\sum_{t=2}^{T}\left[Ac^2 + Bd^2 + Cc^2 + Dd^2 + Ec^2 + Fd^2 + Gc^2 + H\,d^2\right]}\left\{\sum_{t=2}^{T}\left[A\left(ac - \phi_2 ce\right)\right.\right. \\ & + B\left(ad - \phi_2 de\right) + C\left(bc - \phi_2 ce\right) + D\left(bd - \phi_2 de\right) + E\left(ac - \phi_2 cf\right) \\ & \left.\left. + F\left(ad - \phi_2 df\right) + G\left(bc - \phi_2 cf\right) + H\left(bd - \phi_2 df\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_2 = & \frac{1}{\sum_{t=2}^{T}\left[Ae^2 + Be^2 + Ce^2 + De^2 + Ef^2 + Ff^2 + Gf^2 + H\,f^2\right]}\left\{\sum_{t=2}^{T}\left[A\left(ae - \phi_1 ce\right)\right.\right. \\ & + B\left(ae - \phi_1 de\right) + C\left(be - \phi_1 ce\right) + D\left(be - \phi_1 de\right) + E\left(af - \phi_1 cf\right) \\ & \left.\left. + F\left(af - \phi_1 df\right) + G\left(bf - \phi_1 cf\right) + H\left(bf - \phi_1 df\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 = & \frac{1}{\sum_{t=2}^{T}\left[A + B + C + D + E + F + G + H\right]}\left\{\sum_{t=2}^{T}\left[A\left(a - \phi_1 c - \phi_2 e\right)^2 + B\left(a - \phi_1 d - \phi_2 e\right)^2\right.\right. \\ & + C\left(b - \phi_1 c - \phi_2 e\right)^2 + D\left(b - \phi_1 d - \phi_2 e\right)^2 + E\left(a - \phi_1 c - \phi_2 f\right)^2 \\ & \left.\left. + F\left(a - \phi_1 d - \phi_2 f\right)^2 + G\left(b - \phi_1 c - \phi_2 f\right)^2 + H\left(b - \phi_1 d - \phi_2 f\right)^2\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.5}$$

dengan:

$$a = \left(y_t - \hat{\mu}_1\right), \quad b = \left(y_t - \hat{\mu}_2\right), \quad c = \left(y_{t-1} - \hat{\mu}_1\right)$$

$$d = \left(y_{t-1} - \hat{\mu}_2\right), \quad e = \left(y_{t-2} - \hat{\mu}_1\right), \quad f = \left(y_{t-2} - \hat{\mu}_2\right)$$

$$p=\left(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2\right),\quad r=\left(1-\hat{\phi}_2\right),\quad q=\left(1-\hat{\phi}_1\right)$$

$$s=\left(\hat{\phi}_1+\hat{\phi}_2\right),\quad z=\left(y_t-\hat{\phi}_1 y_{t-1}-\hat{\phi}_2 y_{t-2}\right)$$

$$A=\frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)}P\left(X_t=1\mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)f\left(y_t\mid X_t=1,\Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)$$

$$B=\frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)}P\left(X_t=2\mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)f\left(y_t\mid X_t=2,\Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)$$

$$C=\frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)}P\left(X_t=3\mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)f\left(y_t\mid X_t=3,\Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)$$

$$D=\frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)}P\left(X_t=4\mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)f\left(y_t\mid X_t=4,\Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)$$

$$E=\frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)}P\left(X_t=5\mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)f\left(y_t\mid X_t=5,\Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)$$

$$F=\frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)}P\left(X_t=6\mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)f\left(y_t\mid X_t=6,\Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)$$

$$G=\frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)}P\left(X_t=7\mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)f\left(y_t\mid X_t=7,\Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)$$

$$H=\frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)}P\left(X_t=8\mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)f\left(y_t\mid X_t=8,\Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right).$$

Untuk menduga parameter *P* digunakan formula (3.6) berikut yang diperoleh dari Hamilton (1990).

$$\hat{p}_{ij}=\frac{\sum_{t=2}^{T}P\left(X_t=j,X_{t-1}=i\mid \Upsilon_T;\hat{\theta}\right)}{\sum_{t=2}^{T}P\left(X_{t-1}=i\mid \Upsilon_T;\hat{\theta}\right)} \tag{3.6}$$

di mana menurut Kim (1994)

$$\begin{aligned}
&P\left(X_t=j,X_{t-1}=i\mid \Upsilon_T;\hat{\theta}\right)\\
&\quad=P\left(X_t=j\mid \Upsilon_T;\hat{\theta}\right)\times P\left(X_{t\text{-}1}=i\mid X_t=j,\Upsilon_T;\hat{\theta}\right)\\
&\quad\approx P\left(X_t=j\mid \Upsilon_T;\hat{\theta}\right)\times P\left(X_{t\text{-}1}=i\mid X_t=j,\Upsilon_T;\hat{\theta}\right)\\
&\quad=\frac{P\left(X_t=j\mid \Upsilon_T;\hat{\theta}\right)\times P\left(X_{t\text{-}1}=i,X_t=j\mid \Upsilon_T;\hat{\theta}\right)}{P\left(X_t=j\mid \Upsilon_T;\hat{\theta}\right)}\\
&\quad=\frac{P\left(X_t=j\mid \Upsilon_T;\hat{\theta}\right)\times P\left(X_{t\text{-}1}=i\mid \Upsilon_T;\hat{\theta}\right)\times P\left(X_t=j\mid X_{t\text{-}1}=i\right)}{P\left(X_t=j\mid \Upsilon_T;\hat{\theta}\right)}\\
&\quad=\frac{\hat{\varsigma}_{t|T}^{(j)}\cdot\hat{\varsigma}_{t-1|T}^{(i)}\cdot a_{ji}}{\hat{\varsigma}_{t|T}^{(j)}}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

dan $P\left(X_{t-1}=i\mid \Upsilon_T;\hat{\theta}\right)=\sum_{j=1}^{4}P\left(X_t=j,X_{t-1}=i\mid \Upsilon_T;\hat{\theta}\right)=\sum_{j=1}^{4}\frac{\hat{\varsigma}_{t|T}^{(j)}\cdot\hat{\varsigma}_{t-1|T}^{(i)}\cdot a_{ji}}{\hat{\varsigma}_{t|T}^{(j)}}.$

4. PENDUGAAN ULANG PARAMETER DAN ALGORITMA

Karena persamaan (3.1) sampai (3.7) tak linear, maka tidak mungkin untuk memperoleh $\hat{\theta}$ secara analitik sebagai fungsi dari $\{Y_1, Y_2, Y_3, \cdots, Y_T\}$. Sehingga untuk mencari penduga kemungkinan maksimum digunakan algoritma iteratif dari metode EM.

4.1 Metode *Expectation Maximization* (Metode EM): Algoritma EM dikembangkan oleh Baum and Petrie (1966) dengan ide dasar sebagai berikut.

Misalkan $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ adalah koleksi ukuran peluang yang terdefinisi pada ruang $(\Omega, \mathcal{G})$ dan kontinu absolut terhadap P_0. Misalkan $\mathcal{Y} \subset \mathcal{G}$. Definisikan fungsi *likelihood* untuk menentukan penduga parameter θ berdasarkan informasi $\mathcal{Y}$ sebagai

$$L(\theta) = E_0\left[\left.\frac{dP_\theta}{dP_0}\right| \mathcal{Y}\right]$$

dan penduga maksimum *likelihood* didefinisikan sebagai

$$\hat{\theta} \in \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta) .$$

Secara umum penduga maksimum likelihood $\hat{\theta}$ sulit dihitung secara langsung. Algoritma EM memberikan suatu metode iteratif untuk mengaproksimasi $\hat{\theta}$, dengan prosedur sebagai berikut.

Langkah 1: Set $p = 0$ dan pilih $\hat{\theta}_0$.

Langkah 2: [Langkah-E]

Set $\theta^* = \hat{\theta}_p$ dan hitung $Q\left(\theta, \theta^*\right) = E_{\theta^*}\left[\log \left.\frac{dP_\theta}{dP_{\theta^*}}\right| \mathcal{Y}\right]$.

Langkah 3: [Langkah-M]

Tentukan $\hat{\theta}_{p+1} \in \arg\max_{\theta \in \Theta} Q\left(\theta, \theta^*\right)$.

Langkah 4: $p \leftarrow p + 1$

Ulangi langkah 2 sampai kriteria berhenti dipenuhi.

Catatan:

1. Barisan $\{\hat{\theta}_p : p \geq 0\}$ memberikan barisan $\{L\left(\hat{\theta}_p\right) : p \geq 0\}$ yang tak turun.
2. Menurut ketaksamaan Jensen,
$$Q\left(\hat{\theta}_{p+1}, \hat{\theta}_p\right) \leq \log L(\hat{\theta}_{p+1}) - \log L(\hat{\theta}_p) .$$
3. $Q\left(\theta, \theta^*\right)$ disebut *pseudo-loglikelihood* bersyarat.

4.2 Pendugaan ulang parameter menggunakan metode EM: Dengan menggunakan meode EM diperoleh algoritma untuk menduga ulang parameter model. Algoritma tersebut sebagai berikut.

Langkah 1:
Tentukan banyaknya data T yang akan diamati serta tentukan juga nilai $(y_0, y_1, y_2, \cdots, y_T)$ dan matriks transisi P.

Beri nilai awal bagi $\hat{\theta}$ yang dilambangkan dengan $\hat{\theta}^{(0)} = \left(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\sigma}^2\right)$.

Set k = 1

Langkah 2:
Tentukan fungsi kerapatan bersyarat bagi y_t, yaitu η_t seperti pada persamaan 2.8, untuk setiap $t = 1, 2, \cdots, k$

Langkah 3:
Penarikan kesimpulan optimal dan peramalan untuk setiap waktu t pada contoh dapat diperoleh melalui iterasi:

3.1. Tentukan nilai awal $\hat{\xi}_{1|0} = \pi$

3.2. Beri nilai awal $i = 1$

3.3. Untuk $t = i$, cari nilai dari

$$f\left(y_t \middle| \mathrm{Y}_{t-1}; \hat{\theta}^{(m)}\right) = \mathbf{1}'\left(\hat{\xi}_{t|t-1}\right) \otimes \eta_t$$

$$\hat{\xi}_{t|t} = \frac{\left(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t\right)}{\mathbf{1}'\left(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t\right)}$$

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = P \cdot \hat{\xi}_{t|t}$$

$$i = i + 1$$

3.4. Ulangi mulai dari langkah (3.3)
Stop jika $t = k$.

Langkah 4:
Tentukan nilai dari $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\sigma}^2$ yang ditentukan oleh persamaan 3.1 s/d 3.5.

Langkah 5:
Beri nama parameter yang dihasilkan pada langkah 4 dengan $\hat{\theta}^{(k+1)} = \left(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\sigma}^2\right)$

Langkah 6:

Cari P yang baru menggunakan hasil Kim, C.J (1994) dan Hamilton, J. D. (1994), yaitu:

$$\hat{\xi}^{(j)}_{t|T} = \hat{\xi}^{(j)}_{t|t} \otimes \left\{P'.\left[\hat{\xi}^{(j)}_{t+1|T} (\div) \hat{\xi}^{(j)}_{t+1|t}\right]\right\}$$

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \frac{\hat{\xi}^{(j)}_{t|T} \times \hat{\xi}^{(i)}_{t-1|t-1} \times p_{ij}}{\hat{\xi}^{(j)}_{t|t}}}{\sum_{t=2}^{T}\sum_{j=1}^{2} \frac{\hat{\xi}^{(j)}_{t|T} \times \hat{\xi}^{(i)}_{t-1|t-1} \times p_{ij}}{\hat{\xi}^{(j)}_{t|t}}}$$

Langkah 7:

Gunakan parameter yang sudah dihasilkan untuk menentukan dugaan bagi $\hat{Y}_k$

$$E\left[Y_k \mid X_k = j, \mathrm{Y}_{k-1}; \hat{\theta}\right] = \hat{\phi}_1\left(y_{k-1} - \hat{\mu}_{X^*_{k-1}}\right) + \hat{\phi}_2\left(y_{k-2} - \hat{\mu}_{X^*_{k-2}}\right) + \hat{\mu}_{X^*_k}$$

$$\hat{Y}_k = E\left[Y_k \mid \mathrm{Y}_{k-1}; \hat{\theta}\right] = \int y_k . f\left(y_k \mid \mathrm{Y}_{k-1}; \hat{\theta}\right) dy_k = \sum_{j=1}^{N} \hat{\xi}_{k|k-1} . E\left[Y_k \mid X_k = j, \mathrm{Y}_{k-1}; \hat{\theta}\right]$$

.

jika $k < T$, $k =$ k + 1, ulangi langkah 2.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. **Baum, L.E. and Petrie, T.** 1966. Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 37:1554-1563.

[2]. **Hamilton, J. D.** 1990. Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime. *Journal of Econometrics*, 45: 39 -70.

[3]. **Hamilton, J. D.** 1994. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, New Jersey.

[4]. **Kim, C. J.** 1994. Dynamic linear models with Markov-Swiching. *Journal of Econometrics*,60: 1- 22.

[5]. **Setiawaty, B.** 2007. *Laporan Hibah Penelitian PHK A2*, Departemen Matematika FMIPA IPB.