

ANALISIS DINAMIK PADA MODEL SIKLUS BISNIS IS-LM

ROSMELY¹, E. H. NUGRAHANI², P. SIANTURI³

Abstrak

Model siklus bisnis IS-LM merupakan suatu sistem dinamik dalam bidang ekonomi yang terdiri dari variabel pendapatan, stok modal, dan suku bunga. Dalam makalah ini akan dianalisis model siklus bisnis IS-LM tak linear, di mana fungsi investasi, fungsi simpanan, dan fungsi permintaan uang adalah tak linear. Pada persamaan akumulasi stok modal terdapat dua waktu tunda. Dengan menerapkan kriteria perubahan kestabilan dan teori bifurkasi, akan dibuktikan bahwa waktu tunda menyebabkan perubahan titik kesetimbangan dan terjadi bifurkasi Hopf. Hasil teoritis diilustrasikan dalam simulasi numerik pada empat kasus berbeda berdasarkan nilai waktu tunda.

Kata Kunci: bifurkasi Hopf, model IS-LM, waktu tunda

1 PENDAHULUAN

Sistem dinamik dapat diterapkan dalam berbagai bidang ilmu seperti bidang teknik, biologi, ekonomi, dan ilmu-ilmu sosial. Umumnya model sistem dinamik berbentuk sistem persamaan differensial serta analisis kestabilan lokal dan global dari sistem tersebut. Dinamika pertumbuhan perekonomian merupakan situasi yang pasti dialami oleh para pelaku ekonomi. Untuk menjelaskan hubungan antar variabel dalam perekonomian, para ekonom menggunakan model matematika, yang ditulis dalam bentuk sistem dinamik. Salah satunya adalah model siklus bisnis IS-LM (*Investment Saving-Liquidity Money*), yang diperkenalkan oleh Kalecki [6] dan Kaldor [5], kemudian dilanjutkan oleh Torre [8], Gabrisch dan Lorenz [4], Cai [1], serta Zhou dan Li [10].

Model siklus bisnis IS-LM merupakan model makroekonomi yang terdiri dari variabel pendapatan, stok modal, dan suku bunga, serta melibatkan fungsi investasi, fungsi simpanan, dan fungsi permintaan akan uang. Model siklus bisnis yang diperkenalkan oleh Kalecki [6] dengan asumsi bahwa keuntungan yang diperoleh akan disimpan untuk dipergunakan sebagai modal awal investasi, sehingga menyebabkan adanya keterlambatan dalam proses investasi. Keterlambatan ini disebut dengan waktu tunda. Penambahan waktu tunda pada sistem menyebabkan perubahan kestabilan pada titik kesetimbangan sehingga terjadi bifurkasi Hopf yang memenuhi kondisi transversalitas [9].

Dalam karya ilmiah ini akan dianalisis model siklus bisnis IS-LM tak linear. Model ini merupakan modifikasi dengan mensubstitusi bentuk tak linear dari fungsi investasi, fungsi simpanan, dan permintaan uang, berdasarkan ide De Cesare dan

¹ Mahasiswa S2 Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana IPB, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. Email: rosmely50@gmail.com

² Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail: e_nugrahani@ipb.ac.id

³ Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail: psianturi15@gmail.com

Sportelli [2] ke dalam model siklus bisnis Zhou dan Li [10]. Dalam makalah ini disajikan hasil penelitian penulis meliputi analisis perilaku dinamik pada model siklus bisnis IS-LM tak linear. Pada analisis tersebut dilakukan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan dengan mengaplikasikan teori bifurkasi Hopf, serta melakukan simulasi numerik dari hasil teoritis tersebut.

2 MODEL SIKLUS BISNIS IS-LM

Model siklus bisnis IS-LM tak linear merupakan model modifikasi yang diformulasikan dari model siklus bisnis Zhou dan Li [10]. Modifikasi dilakukan dengan mensubstitusi bentuk tak linear dari fungsi investasi (I), fungsi simpanan (S), dan fungsi permintaan uang atau likuiditas (L), menurut De Casare dan Sportelli [2], sebagai berikut:

$$\begin{aligned} I_1(Y(t), R(t)) &= A \frac{[Y(t)]^a}{[R(t)]^b}, \\ S(Y(t), R(t)) &= s_1[Y(t)]^a[R(t)]^b, \\ L(Y(t), R(t)) &= L_1(Y(t)) + L_2(R(t)) = gY(t) + \frac{h}{R(t) - \hat{R}_1}, \end{aligned} \quad (1)$$

sehingga diperoleh model siklus bisnis IS-LM tak linear berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \alpha \left[A \frac{[Y(t)]^a}{[R(t)]^b} + \beta_2 K(t) - s_1[Y(t)]^a[R(t)]^b \right], \\ \frac{dR}{dt} &= \beta_1 \left[gY(t) + \frac{h}{R(t) - \hat{R}_1} - \bar{M} \right], \\ \frac{dK}{dt} &= A \frac{[Y(t - \tau_1)]^a}{[R(t)]^b} - (\delta - \beta_2)K(t - \tau_2). \end{aligned} \quad (2)$$

dengan

- $A > 0$ produktivitas teknologi,
- $\alpha > 0$ percepatan akibat kelebihan atau kekurangan investasi,
- $\beta_1 > 0$ percepatan yang disebabkan adanya kekurangan atau kelebihan permintaan akan uang,
- $\delta > 0$ konstanta penyusutan modal,
- $\bar{M} > 0$ konstanta persediaan uang,
- $-1 < \beta_2 < 0$ tingkat penurunan invetasi terhadap stok modal,
- $a > 0$ koefisien penyesuaian pada pasar barang,
- $b > 0$ koefisien penyesuaian pada pasar uang,
- $0 < s_1 < 1$ tingkat pertumbuhan simpanan terhadap pendapatan,
- $g > 0$ jumlah permintaan uang terhadap pendapatan,
- $h > 0$ jumlah permintaan uang terhadap suku bunga,
- $\hat{R}_1 > 0$ tingkat tetap paling rendah dari suku bunga.

Analisis model dilakukan dengan menentukan titik tetap, kemudian menganalisis kestabilan dari titik tetap tersebut, serta menunjukkan apakah

bifurkasi Hopf terjadi. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik, yang hasilnya disajikan dalam bentuk grafik.

3 ANALISIS MODEL

3.1 Penentuan Titik Tetap

Titik tetap dari sistem (2) dilambangkan dengan E_i . Titik tetap diperoleh dari $\frac{dY}{dt} = \frac{dR}{dt} = \frac{dK}{dt} = 0$ dan ditentukan saat $\tau_1 = \tau_2 = 0$ atau saat sistem tanpa waktu tunda. Titik tetap tersebut ialah

$$E_1 = \left(0, \frac{\bar{M}\hat{R}_1+h}{\bar{M}}, 0\right) \text{ dan } E_2 = (Y^*, R^*, K^*) \quad (3)$$

dengan $Y^*(t) = \frac{1}{g} \left(\bar{M} - \frac{h}{R^*(t)-\hat{R}_1}\right)$, $R^*(t) = \left(\frac{A\delta}{s_1(\delta-\beta_2)}\right)^{\frac{1}{2b}}$, dan $K^*(t) = \frac{s_1}{\delta} Y^*(t)^a R^*(t)^b$.

3.2 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan titik tetap dilakukan dengan pendekatan linear. Misalkan

$$\begin{pmatrix} \dot{Y}(t) \\ \dot{R}(t) \\ \dot{K}(t) \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} Y(t) - Y^* \\ R(t) - R^* \\ K(t) - K^* \end{pmatrix} + J_2 \begin{pmatrix} Y(t - \tau_1) - Y^* \\ R(t - \tau_1) - R^* \\ K(t - \tau_1) - K^* \end{pmatrix} + J_3 \begin{pmatrix} Y(t - \tau_2) - Y^* \\ R(t - \tau_2) - R^* \\ K(t - \tau_2) - K^* \end{pmatrix},$$

di mana J_1, J_2 dan J_3 adalah matriks Jacobi:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \alpha c_1 & \alpha c_2 & \alpha \beta_2 \\ \beta_1 g & \beta_1 c_3 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta + \beta_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

dengan $c_1 = \frac{AY^{a-1}a}{R^b} - s_1 Y^{a-1} a R^b$, $c_2 = -\frac{AY^a b}{R^{b+1}} - s_1 Y^a b R^{b-1}$, $c_3 = -\frac{h}{(R-\hat{R}_1)^2}$, $c_4 = -\frac{AY^a b}{R^{b+1}}$, $c_5 = \frac{AY^{a-1}a}{R^b}$. Selanjutnya dengan menyelesaikan $\det(\lambda I - J_1 - J_2 e^{-\tau_1 \lambda} - J_3 e^{-\tau_2 \lambda}) = 0$, diperoleh persamaan karakteristik tundaan dari sistem persamaan (2) ialah

$$\lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0 + (q_1 \lambda + q_0) e^{-\lambda \tau_1} + (r_2 \lambda^2 + r_1 \lambda + r_0) e^{-\lambda \tau_2} = 0, \quad (5)$$

atau $f(\lambda, \tau_1, \tau_2) = P(\lambda) + Q(\lambda) e^{-\lambda \tau_1} + R(\lambda) e^{-\lambda \tau_2} = 0$ dengan

$$P(\lambda) = \lambda^3 - (\alpha c_1 + \beta_1 c_3) \lambda^2 + \alpha \beta_1 (c_1 c_3 - g c_2) \lambda - \alpha \beta_1 \beta_2 g c_4 \\ = \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0; \quad p_0 < 0,$$

$$Q(\lambda) = -\alpha \beta_2 c_5 \lambda + \alpha \beta_1 \beta_2 c_3 c_5 = q_1 \lambda + q_0; \quad q_1 > 0, q_0 > 0,$$

$$R(\lambda) = (\delta - \beta_2) (\lambda^2 - (\alpha c_1 + \beta_1 c_3) \lambda + \alpha \beta_1 (c_1 c_3 - g c_2)) = r_2 \lambda^2 + r_1 \lambda + r_0; \quad r_2 > 0.$$

Titik tetap akan bersifat stabil jika akar dari persamaan karakteristik mempunyai bagian real bernilai negatif [9]. Analisis kestabilan diberikan dalam empat kasus berikut:

Kasus 1 Tanpa Waktu tunda ($\tau_1 = \tau_2 = 0$)

Titik tetap (3) disubstitusi ke dalam matriks Jacobi (4) sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

1. Untuk titik tetap E_1 diperoleh nilai eigen: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{M^2 \beta_1}{h}, \lambda_3 = -\delta + \beta_2$.
Karena terdapat $\lambda_1 = 0$, sehingga titik tetap E_1 tak terisolasi.
2. Untuk titik tetap E_2 berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, stabil asimtotik jika memenuhi syarat berikut: $p_2 + r_2 > 0$ dan $p_0 + q_0 + r_0 > 0$ dan $(p_2 + r_2)(p_1 + q_1 + r_1) - (p_0 + q_0 + r_0) > 0$.

Kasus 2 $\tau_1 = 0, \tau_2 \neq 0$

Persamaan karakteristik ketika $\tau_1 = 0$ dan $\tau_2 \neq 0$ ialah

$$\lambda^3 + p_2 \lambda^2 + (p_1 + q_1) \lambda + p_0 + q_0 + (r_2 \lambda^2 + r_1 \lambda + r_0) e^{-\lambda \tau_2} = 0. \quad (6)$$

Karena $\tau_2 \neq 0$, maka titik tetap akan mengalami perubahan sifat kestabilan ketika akar karakteristik bernilai imajiner murni [3], misalkan $\lambda = i\omega, \omega > 0, \omega \in \mathbb{R}$, substitusi kedalam persamaan (6) sehingga menjadi

$$\begin{aligned} \omega^6 + (p_2^2 - 2(p_1 + q_1) - r_2^2) \omega^4 + ((p_1 + q_1)^2 - \\ 2(p_0 p_2 + p_2 q_0 - r_0 r_2) - r_1^2) \omega^2 + (p_0 + q_0)^2 - r_0 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

atau $h(u) = u^3 + Bu^2 + Cu + D$ dengan $\omega^2 = u$. Nilai akar dari persamaan (7) dapat diketahui menggunakan lemma yang diberikan oleh Ruang dan Wei [7] berikut:

Lemma 1

Definisikan $\Delta = B^6 - 3C$.

- i. Untuk $D < 0$, persamaan (7) paling sedikit memiliki satu akar positif.
- ii. Untuk $D \geq 0$ dan $\Delta < 0$, persamaan (7) tidak memiliki akar positif.
- iii. Untuk $D \geq 0$ dan $\Delta \geq 0$, persamaan (7) memiliki akar positif jika dan hanya jika $u_1 = \frac{1}{3}(-B + \sqrt{\Delta}) > 0$ dan $h(u_1) \leq 0$.

Perubahan nilai dari akar karakteristik terjadi karena τ_2 meningkat, sehingga diperlukan suatu nilai batas, yang disebut nilai kritis tundaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tau_{2,i}^j = \frac{1}{\omega_j} \arccos \left(-\frac{(-p_2 \omega_j^2 + p_0 + q_0)(-r_2 \omega_j^2 + r_0) + ((p_1 + q_1) \omega_j - \omega_j^3) r_1 \omega_j}{(-r_2 \omega_j^2 + r_0)^2 + r_1^2 \omega_j^2} \right) + \\ \frac{2i\pi}{\omega_j}, \end{aligned} \quad (8)$$

$i = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, 3.$

Pilih ω_j dari ketiga akar positif persamaan (7) dan pilih nilai τ_2^* yang merupakan nilai terkecil dari tak terhingga $\tau_{2,i}^j$ sebagai nilai kritis tundaan. Saat nilai tundaan τ_2 meningkat yang mengakibatkan terjadinya perubahan nilai akar karakteristik persamaan (7) dari memiliki bagian real negatif menjadi memiliki bagian real

positif. Hal ini mengidentifikasi terjadinya bifurkasi Hopf. Syarat terjadinya bifurkasi Hopf adalah memenuhi kondisi transversalitas sebagai berikut:

$$\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda) \right|_{\tau=\tau_2^*, \lambda=iv^*} > 0.$$

Bifurkasi Hopf terjadi saat $\tau_2 = \tau_2^*$, yaitu titik kesetimbangan stabil saat $\tau_2 < \tau_2^*$ dan menjadi tidak stabil saat $\tau_2 > \tau_2^*$.

Kasus 3 $\tau_1 \neq 0, \tau_2 = 0$

Persamaan karakteristik ketika $\tau_1 \neq 0$, dan $\tau_2 = 0$ ialah

$$\lambda^3 + (p_2 + r_2)\lambda^2 + (p_1 + r_1)\lambda + p_0 + r_0 + (q_1\lambda + q_0)e^{-\lambda\tau_1} = 0. \quad (9)$$

Nilai kritis tundaan ialah

$$\tau_{1,i}^j = \frac{1}{\omega_j} \arccos \left(\frac{\left((\omega_j^2 - (p_1 + r_1))q_1 + (p_2 + r_2)q_0 \right) \omega_j^2 - (p_0 + r_0)q_0}{q_1^2 \omega_j^2 + q_0^2} \right) + \frac{2i\pi}{\omega_j}, \quad (10)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, 3.$$

Pilih τ_1^* yang merupakan nilai terkecil dari semua $\tau_{1,i}^j$ sebagai nilai kritis tundaan. Nilai kritis tundaan ini memenuhi kondisi transversalitas sehingga bifurkasi Hopf terjadi saat $\tau_1 = \tau_1^*$, yaitu stabil saat $\tau_1 < \tau_1^*$ dan menjadi tidak stabil saat $\tau_1 > \tau_1^*$.

Kasus 4 $\tau_1 \neq 0, \tau_2 \neq 0$

Persamaan karakteristik tundaan (5) ialah

$$\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 + (q_1\lambda + q_0)e^{-\lambda\tau_1} + (r_2\lambda^2 + r_1\lambda + r_0)e^{-\lambda\tau_2} = 0.$$

Berdasarkan hasil analisis pada Kasus 2 dan Kasus 3, analisis kestabilan pada Kasus 4 ini dilakukan dengan simulasi numerik, yang disajikan pada subbab simulasi model menggunakan Lemma 2.a dan Lemma 2.b yang diberikan Zhou dan Li [10] sebagai berikut:

Lemma 2.a

Jika semua akar persamaan (6) memiliki bagian real negatif untuk $\tau_2 > 0$, maka terdapat suatu τ_1^* yang bergantung pada τ_2 , dinotasikan $\tau_1^*(\tau_2) > 0$, sehingga ketika $0 < \tau_1 < \tau_1^*(\tau_2)$ semua akar dari persamaan (5) memiliki bagian real negatif.

Lemma 2.b

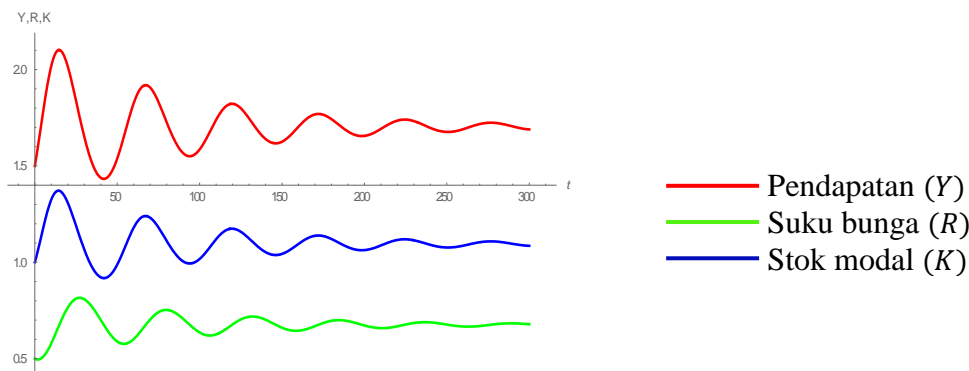
Jika semua akar persamaan (9) memiliki bagian real negatif untuk $\tau_1 > 0$, maka terdapat suatu τ_2^* yang bergantung pada τ_1 , dinotasikan $\tau_2^*(\tau_1) > 0$, sehingga ketika $0 < \tau_2 < \tau_2^*(\tau_1)$ semua akar dari persamaan (5) memiliki bagian real negatif.

4 SIMULASI NUMERIK

Simulasi dilakukan untuk memperlihatkan dinamika sistem yang digambarkan oleh kurva bidang solusi. Untuk memudahkan melihat kestabilan sistem pada waktu t , dengan mensubstitusi nilai-nilai parameter yang memenuhi kriteria kestabilan sistem.

Kasus 1 Tanpa Waktu Tunda ($\tau_1 = \tau_2 = 0$)

Simulasi numerik dilakukan dengan mensubstitusi nilai parameter $A = 0.1, \alpha = 1, \beta_1 = 1, a = 1.03, b = 0.6, \beta_2 = -0.1, \delta = 0.1, s_1 = 0.08, g = 0.05, \bar{M} = 0.1, h = 0.01$, dan $\hat{R}_1 = 0.001$. Diperoleh dua titik tetap, yaitu $E_1 = (0., 0.101, 0.)$ dengan nilai eigen $\lambda_i = (-0.1, 0, -0.2), i = 1, 2, 3$, karena terdapat nilai eigen bernilai nol, sehingga titik tetap E_1 bersifat tak terisolasi. Untuk titik tetap $E_2 = (1.643, 0.561, 1.179)$ bersifat stabil asimtotik karena memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Berikut adalah grafik bidang solusi model tanpa waktu tunda dengan nilai awal $Y = 1.5, R = 0.5$ dan $K = 1$ pada Gambar 1.

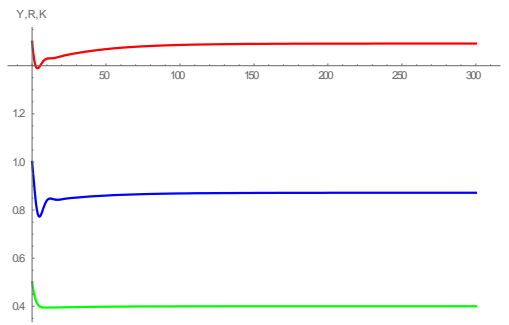


Gambar 1 Bidang solusi sistem tanpa waktu tunda untuk titik tetap E_2

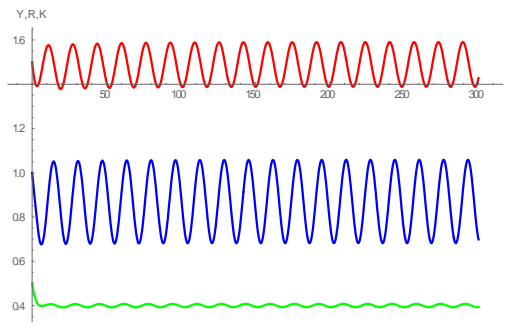
Tingkat pendapatan, suku bunga, dan stok modal berosilasi di awal kemudian menuju suatu titik kestabilan, yaitu $E_2 = (1.643, 0.561, 1.179)$.

Simulasi Model Kasus 2 $\tau_1 = 0, \tau_2 \neq 0$

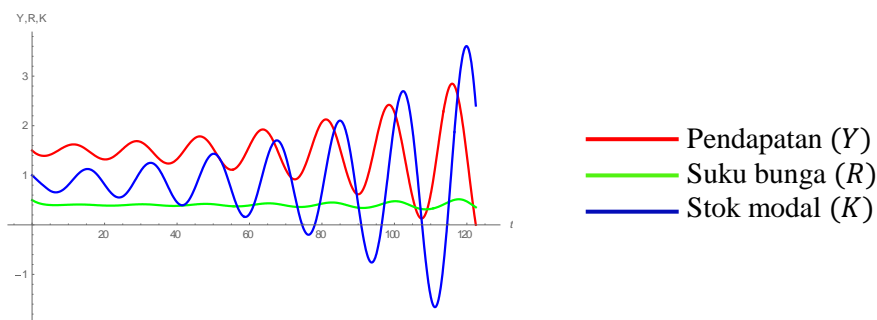
Simulasi numerik dilakukan dengan mensubstitusi nilai parameter $A = 0.1, \alpha = 1, \beta_1 = 1, a = 1.03, b = 0.6, \beta_2 = -0.2, \delta = 0.1, s_1 = 0.1, g = 0.05, h = 0.09, \hat{R}_1 = 0.001$, dan $\bar{M} = 0.3$. Diperoleh titik tetap $E_2 = (1.492, 0.400, 0.872)$ yang memenuhi kriteria kestabilan Routh-Hurwitz serta kriteria $D \geq 0, \Delta \geq 0, u_1 > 0$ dan $h(u_1) \leq 0$. Nilai kritis tundaan adalah $\tau_2^* = 3.994$. Pengamatan dilakukan pada nilai $\tau_2 = 2, \tau_2 = 3.994, \tau_2 = 4.5$ dan nilai awal $Y = 1.5, R = 0.5$ dan $K = 1$.



Gambar 2 Bidang solusi dengan waktu tunda $\tau_1 = 0, \tau_2 = 2$



Gambar 3 Bidang solusi dengan waktu tunda $\tau_1 = 0, \tau_2 = 3.994$

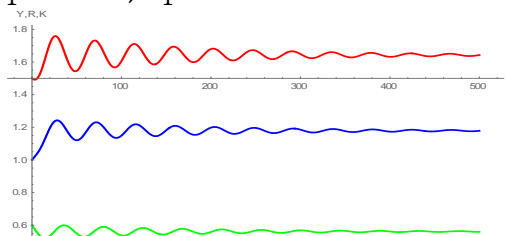


Gambar 4 Bidang solusi dengan waktu tunda $\tau_1 = 0, \tau_2 = 4.5$

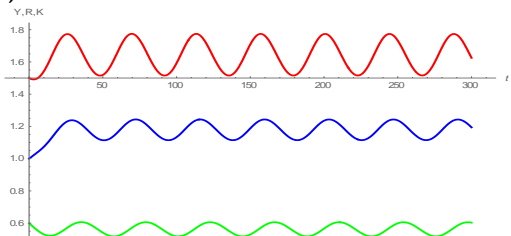
Tingkat pendapatan, suku bunga, dan stok modal bersifat stabil saat $\tau_2 < \tau_2^*$ yang ditunjukkan pada Gambar 2 dan menjadi tidak stabil saat $\tau_2 > \tau_2^*$ pada Gambar 4. Pada Gambar 3 saat $\tau_2 = \tau_2^*$ terlihat bahwa sistem menunjukkan pergerakan osilasi yang konstan, disebabkan adanya perubahan nilai eigen menjadi bentuk imajiner murni, yang mengakibatkan kestabilan sistem ikut berubah. Hal ini menunjukkan terjadinya bifurkasi Hopf.

Simulasi Model Kasus 3 $\tau_1 \neq 0, \tau_2 = 0$

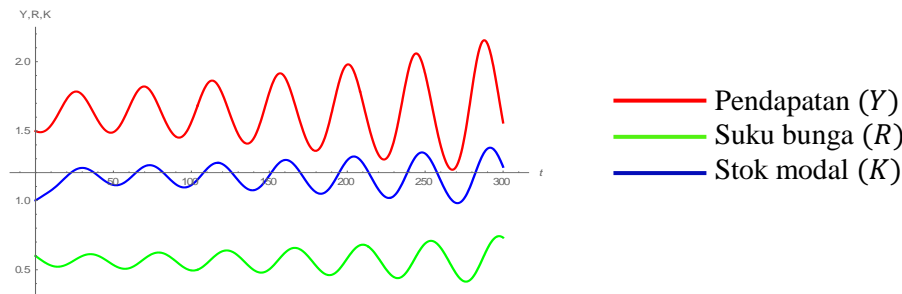
Simulasi numerik dilakukan dengan mensubstitusi nilai parameter $A = 0.1, \alpha = 1, \beta_1 = 1, a = 1.03, b = 0.6, \beta_2 = -0.1, \delta = 0.1, s_1 = 0.1, g = 0.05, h = 0.01, \hat{R}_1 = 0.001$, dan $\bar{M} = 0.1$. Diperoleh titik tetap $E_2 = (1.643, 0.561, 1.179)$ yang memenuhi kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dan $D \geq 0, \Delta \geq 0, u_1 > 0$ dan $k(u_1) \leq 0$. Nilai kritis tundaan adalah $\tau_1^* = 2.610$. Pengamatan dilakukan pada nilai $\tau_1 = 1.5, \tau_1 = 2.610, \tau_1 = 3.5$ dan nilai awal $Y = 1.5, R = 0.6$ dan $K = 1$.



Gambar 5 Bidang solusi dengan waktu tunda $\tau_1 = 1.5, \tau_2 = 0$



Gambar 6 Bidang solusi dengan waktu tunda $\tau_1 = 2.610, \tau_2 = 0$



Gambar 7 Bidang solusi dengan waktu tunda $\tau_1 = 3.5, \tau_2 = 0$

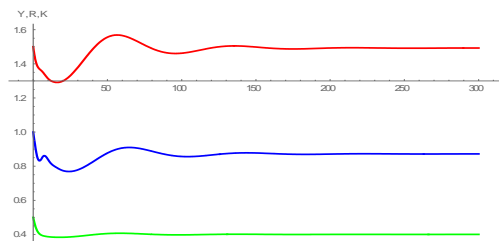
Tingkat pendapatan, suku bunga, dan stok modal bersifat stabil saat $\tau_1 < \tau_1^*$ yang ditunjukkan pada Gambar 5 dan menjadi tidak stabil saat $\tau_1 > \tau_1^*$ pada Gambar 7. Pada Gambar 6 saat $\tau_1 = \tau_1^*$ terlihat bahwa sistem menunjukkan pergerakan osilasi yang konstan, disebabkan adanya perubahan nilai eigen menjadi bentuk imajiner murni, yang mengakibatkan kestabilan sistem ikut berubah. Hal ini menunjukkan terjadinya bifurkasi Hopf.

Kasus 4 $\tau_1 \neq 0, \tau_2 \neq 0$

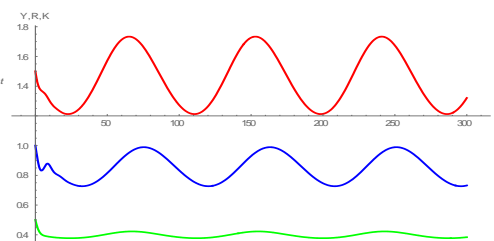
Pada Kasus 4 ini simulasi dilakukan dalam dua subkasus yang berbeda berdasarkan hasil analisis yang diperoleh dari Kasus 2 dan Kasus 3 sebelumnya.

Subkasus 4.1 Saat τ_2 Stabil

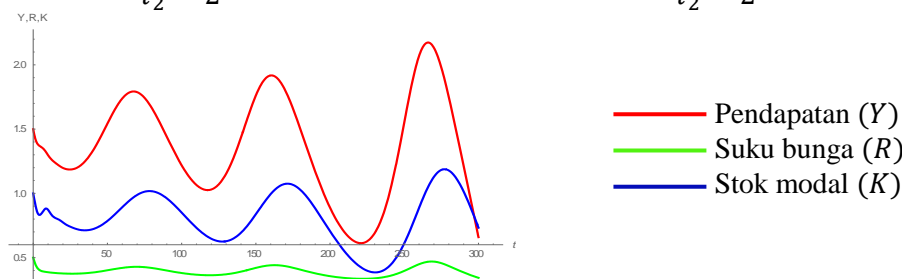
Simulasi model dilakukan saat $\tau_2 > 0$ berada dalam keadaan stabil, yaitu $\tau_2 < 3.994$ pada titik tetap (1.492, 0.400, 0.872). Pengamatan dilakukan pada nilai $\tau_2 = 2$ dan $\tau_1 > 0$ dengan nilai $\tau_1 = 6, \tau_1 = 7.39, \tau_1 = 7.7$, dengan nilai awal (1.5, 0.5, 1). Berikut adalah gambar bidang solusi saat τ_2 stabil dan τ_1 divariasikan:



Gambar 8 Bidang solusi saat $\tau_1 = 6,$
 $\tau_2 = 2$



Gambar 9 Bidang solusi saat $\tau_1 = 7.39,$
 $\tau_2 = 2$

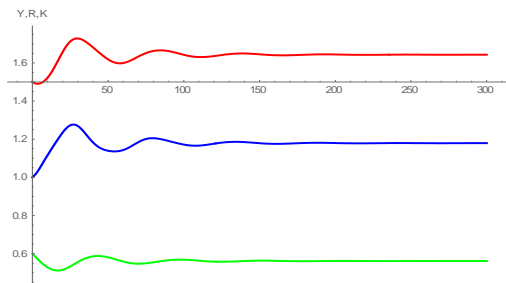


Gambar 10 Bidang solusi saat $\tau_1 = 7.7, \tau_2 = 2$

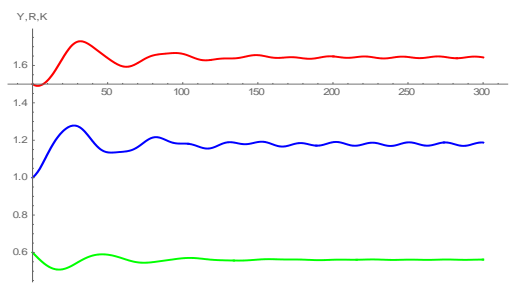
Pada Gambar 8 terlihat bahwa tingkat pendapatan, suku bunga, dan stok modal bersifat stabil saat $\tau_1 = 6$ dan menjadi tidak stabil saat $\tau_1 = 7.7$ pada Gambar 10. Pada Gambar 9 saat $\tau_1 = 7.39$ terlihat bahwa sistem menunjukkan pergerakan osilasi yang konstan, ini disebabkan adanya perubahan nilai eigen menjadi bentuk imajiner murni. Diduga nilai $\tau_1 = 7.39 = \tau_1^*(\tau_2)$ adalah nilai kritis tundaan yang menunjukkan terjadinya bifurkasi Hopf.

Subkasus 4.2 Saat τ_1 Stabil

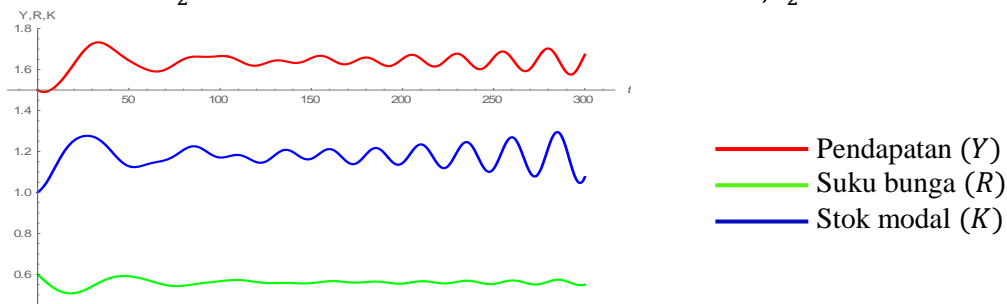
Simulasi model dilakukan saat $\tau_1 > 0$ berada dalam keadaan stabil, yaitu $\tau_1 < 2.610$ pada titik tetap (1.643, 0.561, 1.179). Pengamatan dilakukan pada nilai $\tau_1 = 1.5$ dan $\tau_2 > 0$ dengan nilai $\tau_2 = 4, \tau_2 = 5.56,$ dan $\tau_2 = 6$ serta dengan nilai awal (1.5, 0.6, 1). Berikut adalah gambar bidang solusi saat τ_1 stabil dan τ_2 divariasikan:



Gambar 11 Bidang solusi saat $\tau_1 = 1.5,$
 $\tau_2 = 4$



Gambar 12 Bidang solusi saat $\tau_1 = 1.5,$
 $\tau_2 = 5.56$



Gambar 13 Bidang solusi saat $\tau_1 = 1.5, \tau_2 = 6$

Pada Gambar 11 terlihat bahwa tingkat pendapatan, suku bunga, dan stok modal bersifat stabil saat $\tau_2 = 4$ dan menjadi tidak stabil saat $\tau_2 = 6$ pada Gambar 13. Pada Gambar 12 saat $\tau_2 = 5.56$ terlihat bahwa sistem menunjukkan pergerakan osilasi yang konstan, ini disebabkan adanya perubahan nilai eigen menjadi bentuk imajiner murni. Diduga nilai $\tau_2 = 5.56 = \tau_2^*(\tau_1)$ adalah nilai kritis tundaan yang menunjukkan terjadinya bifurkasi Hopf.

5 SIMPULAN

Model yang diteliti pada penelitian ini adalah model siklus bisnis IS-LM tak linear dengan dua waktu tunda pada akumulasi stok modal. Waktu tunda merupakan waktu yang dibutuhkan bagi pendapatan dan stok modal agar dapat

digunakan sebagai investasi. Model ini diamati pada empat kasus yang berbeda berdasarkan waktu tunda. Kasus 1 adalah model tanpa waktu tunda diperoleh dua titik tetap, yaitu titik tetap pertama bersifat tak terisolasi dikarenakan adanya nilai eigen bernilai nol, dan titik tetap kedua bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi kriteria kestabilan Routh-Hurwitz. Kasus 2 waktu tunda diberikan dalam persamaan stok modal. Kasus 3 waktu tunda diberikan dalam persamaan pendapatan. Kasus 4 waktu tunda diberikan pada kedua persamaan stok modal dan pendapatan. Pada kasus dengan waktu tunda, diperoleh nilai kritis tundaan, yang merupakan waktu toleransi keterlambatan bagi pendapatan dan stok modal agar tetap sesuai dengan keadaan yang direncanakan. Bifurkasi Hopf terjadi ketika nilai waktu tunda sama dengan nilai kritis tundaan dan juga memenuhi kondisi transversalitas.

Pengamatan pada simulasi model dilakukan berdasarkan hasil analitik. Saat bifurkasi Hopf terjadi, grafik pada bidang solusi memperlihatkan pergerakan osilasi yang konstan dari tingkat pendapatan, suku bunga, dan stok modal. Apabila nilai waktu tunda yang diberikan kurang dari nilai kritis tundaan, sistem memunyai solusi yang terkontrol menuju kondisi yang seimbang. Kemudian ketika nilai waktu tunda diberikan lebih besar dari nilai kritis tundaan, solusi sistem akan terus berfluktuasi sehingga menyebabkan kondisi sistem yang tidak stabil.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Cai J. 2005. Hopf Bifurcation in The IS-LM Business Cycle Model Cycle Model with Time Delay. *Electronic Journal of Differential Equations*. 15: 1-6.
- [2] De Cesare L, Sportelli M. 2005. A dynamic IS-LM model with delayed taxation revenues. *Chaos. Solutions and Fractals*. 25: 233-244.
- [3] Forde J, Nelson P. 2004. Application of Sturm sequences to bifurcation analysis of delay differential equation models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 300(4): 273-284. doi: 10.1016/j.jmaa.2004.02.4063.
- [4] Gabrisch G, Lorenz HW. 1987. *Business cycle Theory A Survey of Methods and Concepts*. Berlin(DE): Springer-Verlag.
- [5] Kaldor N. 1940. A model of the trade cycle. *Economic Journal*, 50(197): 78-92.4
- [6] Kalecki M. 1935. A macrodynamic theory of business cycle. *Econometrica*. 3(3): 327-344.
- [7] Ruan S, Wei J. 2001. On the zeros of a third degree exponential polynomial with applications to a delayed model for the control of testosterone secretion. *IMA Journal of Applied in Medicine and Biology*. 1 Sisipan 18: 41-52.4 doi: 10.1093/imammb18.1.41.
- [8] Torre V. 1977. Existence of limit cycles and control in complete Keynesian system by theory of bifurcations. *Ekonometrika*. 45(6): 1457-1466. doi: 10.2307/1912311.
- [9] Tu PNV. 1994. *Dynamical System: An Introduction with Application in Economics and Biology*. New York: Springer-Verlag.
- [10] Zhou L, Li Y. 2009. A dynamic IS-LM business cycle model with two time delays in capital accumulation equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 228: 182-187.