PENENTUAN HARGA OPSI SEBAGAI ALAT LINDUNG NILAI PETANI GABAH MENGGUNAKAN METODE MONTE CARLO DAN TEKNIK *CONTROL VARIATE*

W. AYUDIAH[1], D. C. LESMANA[2], E. H. NUGRAHANI[2]

Abstrak

Opsi adalah suatu kontrak yang memberikan hak kepada pembelinya atau pemegangnya, bukan kewajiban, untuk membeli atau pun menjual sebuah aset yang menjadi acuan dengan harga *strike* tertentu di waktu tertentu. Opsi yang digunakan dalam penelitian ini adalah opsi *call*, opsi *put* dan opsi biner. Semua opsi tersebut adalah opsi tipe Eropa. Pada penelitian ini digunakan metode numerik untuk menentukan harga atau nilai opsi. Metode numerik yang digunakan adalah metode Monte Carlo (MC) dan teknik *control variate* (CV). Teknik CV tersebut berguna untuk mereduksi variansi dari hasil atau nilai opsi yang diperoleh dari metode MC, sehingga nilai opsi yang diperoleh dengan menggunakan teknik CV lebih akurat dibandingkan dengan hasil nilai opsi yang diperoleh dari metode MC standar. Setelah menentukan harga opsi, petani dapat menggunakan harga tersebut sebagai acuan untuk membeli opsi yang digunakan sebagai alat lindung nilai dari hasil panen yang harganya berisiko menurun.

Kata Kunci: opsi vanila, opsi biner, Monte Carlo, *control variate.*

1 PENDAHULUAN

Pasar modal adalah instrumen keuangan yang memperjualbelikan surat-surat berharga berupa obligasi dan saham maupun aset keuangan lainnya untuk jangka panjang maupun jangka pendek yang diterbitkan oleh pemerintah atau perusahaan swasta. Kegiatan jual-beli tersebut dilaksanakan di bursa, yang merupakan tempat bertemunya para pialang yang mewakili investor.

Industri pasar modal berkembang pesat, bukan hanya memperdagangkan produk dasar seperti saham dan obligasi tetapi juga produk turunannya yang dikenal dengan insrumen derivatif, dan tidak lagi hanya memperdagangkan produknya di bursa melainkan bisa secara leluasa di manapun tempat transaksi yang diinginkan antar penjual dan pembeli kontrak derivatif. Kegunaan dari instrumen derivatif ini salah satunya adalah sebagai alat untuk meminimalkan risiko, yang disebut sebagai *hedging* (lindung nilai). Salah satu produk derivatif yang banyak digunakan adalah opsi.

Opsi adalah kontrak di mana salah satu pihak menyetujui untuk membayar

[1] Mahasiswa S2, Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana IPB, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. Email: widya.ayudiah@gmail.com

[2] Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

sejumlah imbalan kepada pihak yang lainnya untuk suatu “hak” (bukan kewajiban) untuk membeli atau menjual sesuatu yang menjadi aset acuan di dalam perjanjian kontrak kepada pihak yang lain [11]. Menentukan harga opsi dengan jangka waktu tertentu tidaklah mudah, mengingat perilaku dari harga suatu aset setiap waktu berubah-ubah mengikuti suatu proses stokastik karena tidak adanya kepastian bahwa suatu harga aset akan naik ataukah turun saat dilihat di waktu yang akan datang. Oleh karena itu, diperlukan adanya simulasi sebagai alat dalam statistika yang digunakan untuk membangkitkan data dengan batasan-batasan yang telah ditentukan. Metode simulasi yang sering digunakan salah satunya adalah simulasi Monte Carlo (MC).

Simulasi Monte Carlo digunakan dalam basis harian perbankan dan intrustri keuangan lain untuk menilai produk turunan finansial. Simulasi ini harus memberikan estimasi yang tepat dalam waktu yang sangat singkat. Oleh karena itu peningkatan efisiensi cukup penting dalam konteks ini [2]. Sedangkan, metode MC memiliki tingkat efisiensi mereduksi ragam yang rendah [12]. Sehingga dilakukan modifikasi MC yang berguna untuk memperbaiki kekurangan metode simulasi tersebut yang mana memiliki karakter kekonvergenan yang cenderung lambat [6]. Modifikasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah *control variate* (CV). Metode CV ini sangat berguna sebagai alat untuk mereduksi variansi.

Penelitian ini akan menggunakan metode simulasi MC terlebih dahulu kemudian menggunakan metode simulasi MC dengan teknik CV tersebut. Sehingga nantinya akan dilihat bagaimana perbandingan perilaku kecepatan kekonvergenan masing-masing metode, kemudian hasilnya akan digunakan sebagai acuan dalam menetapkan harga opsi yang diinginkan. Fokus opsi pada penelitian ini adalah opsi *call* dan opsi *put* tipe Eropa serta opsi biner (*cash or nothing*). Aset acuan yang akan digunakan dalam opsi tersebut adalah gabah kering. Data harga gabah satu tahun terakhir digunakan sebagai acuan penentuan parameter-parameter dalam simulasi.

2 METODE MONTE CARLO PADA HARGA OPSI

Simulasi MC dapat digunakan untuk menaksir harga opsi. Dalam penelitian ini, simulasi Monte Carlo dilakukan untuk menentukan nilai opsi *call, put*, dan biner tipe Eropa. Simulasi MC menggunkan penilaian *risk-neutral* di mana nilai harapan atau ekspektasi *payoff* pada suatu *risk-neutral-world* dihitung dengan menggunakan sebuah prosedur *sampling* dan didiskontokan pada suku bunga bebas risiko (*risk-free interest rate*) [10]. Nilai atau harga dari sebuah opsi ekuivalen dengan menghitung ekspektasi dari *payoff* yang didiskontokan dengan tingkat bunga dan ukuran waktu tertentu.

Pada simulasi ini diambil beberapa asumsi sebagai berikut [11]:

1. Pergerakan harga aset, dalam hal ini adalah harga gabah, mengikuti sebaran *lognormal*.
2. Tidak terdapat kesempatan arbitrasi.

3. Harga aset dinilai pada suku bunga bebas risiko.

Pandang persamaan (1) dalam *risk-neutral world*. Misalkan proses stokastik harga aset mengikuti proses berikut [7]:

$$S(T) = S(0)\exp\left((r - \sigma^2/2)T + \sigma\varepsilon\sqrt{T}\right), \quad (1)$$

dengan $S(T)$ adalah harga aset saat jatuh tempo, $S(0)$ harga aset di awal, r adalah tingkat suku bunga bebas risiko, σ adalah volatilitas per tahun, dan ε adalah bilangan acak yang menyebar normal baku $\left(\varepsilon \sim \phi(0,1)\right)$ [10]. Dengan membangkitkan bilangan acak menggunakan metode MC maka diperoleh hasil pendekatan dari harga aset pada waktu jatuh tempo yang telah ditentukan. Sehingga dapat diperoleh harga opsi tipe Eropa dari hasil pendekatan harga aset yang didefinisikan sebagai nilai harapan pendekatan harga opsi. Untuk setiap $n \geq 1$, pendekatan takbias harga opsi dengan menggunakan metode MC adalah sebagai berikut [2]:

1. Opsi *vanilla*:
   - Pendekatan nilai opsi *call* pada saat $t = 0$ adalah:

   $$E\left[\hat{V}_c(0)\right] = E[C(T)] \cdot e^{-rT} \quad (2)$$

   dengan $E[C(T)]$ adalah rata-rata *payoff* opsi *call* pada waktu jatuh tempo $(t = T)$.
   - Pendekatan nilai opsi *put* pada saat t=0 adalah:

   $$E\left[\hat{V}_p(0)\right] = E[P(T)] \cdot e^{-rT} \quad (3)$$

   dengan $E[P(T)]$ adalah rata-rata *payoff* opsi *put* pada waktu jatuh tempo $(t = T)$.
2. Opsi biner:

   Pendekatan nilai opsi biner adalah rata-rata dari perkalian antara nilai harapan *payoff* opsi biner dengan faktor diskon, atau nilai sekarang dari rata-rata *payoff* opsi biner, yang diberikan oleh rumus berikut:

   $$E\left[\hat{B}(0)\right] = E[B(T)] \cdot e^{-rT} \quad (4)$$

Misalkan estimator takbias dilambangkan sebagai $\hat{Y}_n$ dan Y adalah nilai sebenarnya, maka untuk $n \to \infty$ akan mengakibatkan $\hat{Y}_n \to Y$ dengan peluang 1 [7]. Untuk batasan n yang cukup besar, selang kepercayaan $\hat{Y}_n$ diberikan sebagai berikut:

$$\hat{Y}_n \pm z_{\frac{\delta}{2}} \frac{s_Y}{\sqrt{n}}$$

dengan s_Y adalah standar deviasi dan diberikan oleh rumus berikut [2]:

$$s_Y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_n\right)^2}$$

dan z_δ menunjukkan quantil $1-\delta$ dari sebaran normal baku. Ini menunjukkan bahwa tingkat kekonvergenan perhitungan dengan simulasi MC adalah $O\left(n^{-1/2}\right)$, sehingga dapat dikatakan lambat dalam hal kokonvergenan [6]. Oleh sebab itu dilakukan teknik untuk memperkecil variansi dari hasil pendekatan yang dibangun dalam simulasi saat dilakukan perulangan dengan n tertentu. Teknik memperkecil variansi tersebut dikenal dengan nama teknik *control variate* [7].

3 TEKNIK CONTROL VARIATE PADA SIMULASI MONTE CARLO

Control variate (CV) adalah teknik yang paling efektif dan aplikatif untuk meningkatkan efisiensi simulasi Monte Carlo (MC) [6]. Teknik CV ini merupakan cara untuk mengurangi *error* atau galat dari hasil simulasi MC dengan cara mereduksi variansinya [4]. Untuk menjelaskan metode ini, perhatikan permisalan berikut; misalkan μ adalah nilai harapan dari peubah acak Y, di mana Y adalah nilai pendekatan yang diperoleh dengan menggunkan metode Monte Carlo [8]:

$$\mu = E[Y].$$

Kemudian ditentukan *control variate* untuk Y yang dikenal dengan variabel kontrol. Misalkan bahwa X adalah variabel kontrol untuk Y yang juga dihitung secara numerik dan diketahui nilai analitik untuk nilai harapannya, yaitu sebesar $E[X]$, serta memiliki korelasi dengan Y. Selanjutnya dibangun estimator takbias untuk μ, sebagai berikut[4]:

$$\hat{\mu}_k = Y + k\,(X - E[X]). \tag{5}$$

Dengan demikian,

$$E[\hat{\mu}_k] \equiv \mu.$$

Nilai k dipilih sedemikian sehingga menjamin bahwa variansi dari hasil pendekatan metode CV lebih kecil dibandingkan variansi dari hasil pendekatan metode MC, sehingga hasil pendekatan yang diperoleh dari metode CV lebih akurat dibandingkan hasil yang diperoleh dari metode MC. Dalam pemilihan nilai k akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{var}(Y) > \mathrm{var}\,(\hat{\mu}_k)$ dengan melakukan langkah-langkah berikut:

Nilai variansi dari pendekatan CV diberikan oleh rumus berikut [3]:

$$\mathrm{var}(\hat{\mu}_k) = \mathrm{var}(Y) + k^2\mathrm{var}(X) + 2k\mathrm{cov}(Y,X) \tag{6}$$

variansi pendekatan CV dengan $\mathrm{var}(Y)$ adalah variansi peubah acak Y yang dihitung dari simulasi MC dengan menggunakan kalkulus sederhana diperoleh,

$$k^* = -\frac{\mathrm{cov}(Y,X)}{\mathrm{var}\,(X)}. \tag{7}$$

Kemudian nilai k^* mengganti nilai k pada persamaan (6), maka [1]

$$\mathrm{var}(\hat{\mu}_{k^*}) = \mathrm{var}(Y) - \frac{\mathrm{cov}(Y,X)^2}{\mathrm{var}(X)}. \tag{8}$$

Dari persamaan (8) dapat dilihat bahwa $\mathrm{var}(\hat{\mu}_{k^*}) < \mathrm{var}(Y)$ untuk $\frac{\mathrm{cov}(Y,X)^2}{\mathrm{var}(X)} > 0$. Sehingga untuk meminimumkan $\mathrm{var}(\hat{\mu}_{k^*})$diperlukan koefisien korelasi dari Y dan X yang besar. Karena dalam hal ini nilai $\mathrm{cov}(Y,X)$ dan $\mathrm{var}(X)$tidak diketahui, maka k^*juga tidak tersedia. Tetapi k^*dapat diperkirakan dengan menggunakan simulasi *p*-pilot [5]. Simulasi *p*-pilot merupakan simulasi numerik yang hasilnya digunakan kembali untuk simulasi yang lain, dalam hal ini simulasi MC dan CV, sehingga dibuat simulasi yang terpisah dari simulasi penentuan nilai opsi. Untuk metode simulasinya, bisa dilalukan metode apa saja tetapi saat melakukan simulasi *p*-pilot untuk mendapatkan nilai k^* jumlah perulangan pada simulasi sebaiknya sedikit, karena jika simulasi dilakukan dengan jumlah perulangan yang relatif banyak maka akan mengakibatkan nilai $\hat{\mu}_{k^*}$ berbias [1]. Nilai k^* diberikan oleh rumus sebagai berikut [3].

$$k = -\frac{\widehat{\mathrm{cov}}(Y,X)}{\widehat{\mathrm{var}}(X)},$$

di mana

$$\widehat{\mathrm{cov}}(Y,X) = \frac{\sum_{j=1}^{p}\left(Y_j - \bar{Y}_p\right)\left(X_j - E[X]\right)}{p-1}, \tag{9}$$

$$\widehat{\mathrm{var}}(X) = \frac{\sum_{j=1}^{p}\left(X_j - E[X]\right)^2}{p-1} \tag{10}$$

4 PENENTUAN NILAI OPSI MENGGUNAKAN METODE MONTE CARLO DAN TEKNIK *CONTROL VARIATE*

Misalkan $\hat{\mu}_{MC}$ adalah nilai opsi yang diperoleh dengan metode Monte Carlo, di mana $\hat{\mu}_{MC}$ diambil dengan menghitung nilai sekarang dari rata-rata *payoff* opsi pada saat jatuh tempo.

- Berikut didefinikan *payoff* dan rata-rata *payoff* dari opsi *call*:

  Penentuan nilai *payoff* opsi *call* pada waktu jatuh tempo pada perulangan ke-i diberikan oleh rumus berikut [5]:

$$Y_c^{(i)} = \max\left(S_T^{(i)} - K, 0\right)$$

  dengan ST : harga aset pada saat jatuh tempo. Perhatikan persamaan (1)
  K : harga *strike*

  Kemudian ditentukan rata-rata *payoff* opsi *call* pada waktu jatuh tempo $t = T$ dengan rumus berikut:

$$E\left[Y_c^{(T)}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_c^{(i)}}{n}.$$

  Dengan demikian, nilai opsi *call* yang diperoleh dengan menggunakan metode Monte Carlo diberikan oleh rumus sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_{MC} = e^{-rT} \cdot E\left[Y_c^{(T)}\right]. \tag{11}$$

- Berikut didefinisikan *payoff* dan rata-rata *payoff* dari opsi *put*:

  Penentuan nilai *payoff* opsi *put* pada waktu jatuh tempo pada perulangan ke-i diberikan oleh rumus berikut [5] :

$$Y_p^{(i)} = \max(K - S_T^{(i)}, 0)$$

  Kemudian ditentukan rata-rata *payoff* opsi *call* pada waktu jatuh tempo $t = T$ dengan rumus berikut:

$$E\left[Y_p^{(T)}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_p^{(i)}}{n}.$$

  Dengan demikian, nilai opsi *put* yang diperoleh dengan menggunakan metode Monte Carlo diberikan oleh rumus sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_{MC} = e^{-rT} \cdot E\left[Y_p^{(T)}\right]. \tag{12}$$

- Berikut didefinisikan *payoff* dan rata-rata *payoff* dari opsi biner (*cash-or-nothing*):

  Penentuan nilai *payoff* opsi biner pada waktu jatuh tempo pada perulangan ke-i diberikan oleh rumus berikut [5]:

$$Y_B^{(i)} = QZ$$

di mana Q adalah imbalan/subsidi yang diberikan pihak penjual opsi kepada pembeli opsi sesuai kesepakatan, dan

$$Z = \begin{cases} 1\,; & S(T) < K \\ 0\,; & S(T) \geq K\,. \end{cases}$$

Kemudian ditentukan rata-rata *payoff* opsi *call* pada waktu jatuh tempo $t = T$ dengan rumus berikut:

$$E\left[Y_B^{(T)}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_B^{(i)}}{n}.$$

Dengan demikian, nilai opsi biner yang diperoleh dengan menggunakan metode Monte Carlo diberikan oleh rumus sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_{MC} = e^{-rT} \cdot E\left[Y_B^{(T)}\right]. \qquad (13)$$

Nilai $\hat{\mu}_{MC}$ adalah harga opsi yang diperoleh dari nilai pendekatan dengan menggunakan metode Monte Carlo.

Selanjutnya, dengan mengambil harga aset atau harga gabah pada saat T sebagai variabel kontrol X, maka X diberikan oleh rumus berikut:

$$X = S(T) = S(0)\, exp\left((r - \sigma^2/2)T \;+\; \sigma\varepsilon\sqrt{T}\right) \qquad (14)$$

di mana $S(0)$ adalah harga aset di awal, r adalah tingkat suku bunga bebas risiko, σ adalah volatilitas per tahun, T adalah waktu jatuh tempo opsi, dan ε adalah bilangan acak yang menyebar normal baku ($\varepsilon \sim \phi$(0,1)).

Teorema 1:

Misalkan

$$X = S(0)\, exp\left((r - \sigma^2/2)T \;+\; \sigma\varepsilon\sqrt{T}\right)$$

di mana

S_0 : harga gabah sekarang
r : suku bunga bebas risiko
σ : volatilitas
T : waktu jatuh tempo
ε : peubah acak yang menyebar normal baku $\varepsilon \sim \phi(0,1)$
X : harga gabah saat jatuh tempo,

maka

$$E[X] = S(0)e^{rT}.$$

Bukti:

$$X = S_0 e^{\left((r-\sigma^2/2)T \,+\, \sigma\varepsilon\sqrt{T}\right)}$$
$$\ln X = \ln S_0\, e^{\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T \,+\, \sigma\varepsilon\sqrt{T}\right)}$$
$$= \ln S_0 + \ln\left[e^{\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T \,+\, \sigma\varepsilon\sqrt{T}\right)}\right]$$
$$= \ln S_0 + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T \;+\; \sigma\varepsilon\sqrt{T}$$
$$\ln X - \ln S_0 = \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T \;+\; \sigma\varepsilon\sqrt{T}.$$

Karena harga gabah mengikuti proses Wiener maka [14]

$$\ln X - \ln S_0 \sim \emptyset\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\,\right]$$

atau

$$Z = \ln X \sim \emptyset\left[\ln S_0 + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\,\right],$$

maka
nilai rataan Z:

$$\mu_Z = E[Z] = \ln S_0 + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T,$$

variansi Z:

$$\sigma_Z^2 = \mathrm{var}(Z) = \sigma^2 T.$$

Fungsi pembangkit momen Z:

$$M_Z(t) = E[e^{Zt}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{Zt}}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Z-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}}\,dz$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}} e^{Zt-\frac{(Z-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}}\,dz$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_Z^2}\left((Z-\mu_Z)^2-2\sigma_Z^2 tZ\right)}\,dz$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_Z^2}\left(Z-2\mu_Z Z+\mu_Z^2-2\sigma_Z^2 tZ\right)}\,dz$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_Z^2}\overbrace{\left(Z^2-2\left(\mu_Z+\sigma_Z^2 t\right)Z+\mu_Z^2\right)}}\,dz \tag{16}$$

$$(*) \quad Z^2 - 2(\mu_Z + \sigma_Z^2 t)Z + \mu_Z^2 = [Z - (\mu_Z + \sigma_Z^2 t)]^2 - (\mu_Z + \sigma_Z^2 t)^2 + \mu_Z^2$$
$$= [Z - (\mu_Z + \sigma_Z^2 t)]^2 - \mu_Z^2 - 2\mu_Z\sigma_Z^2 t - \sigma_Z^4 t^2 + \mu_Z^2$$
$$= [Z - (\mu_Z + \sigma_Z^2 t)]^2 - 2\mu_Z\sigma_Z^2 t - \sigma_Z^4 t^2$$

dengan subtitusi (*) ke persamaan (16) maka:

$$
\begin{aligned}
M_Z(t) = E[e^{Zt}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_Z^2}\left([Z-(\mu_Z+\sigma_Z^2 t)]^2-2\mu_Z\sigma_Z^2 t-\sigma_Z^4 t^2\right)} dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_Z^2}\left([Z-(\mu_Z+\sigma_Z^2 t)]^2-2\mu_Z\sigma_Z^2 t-\sigma_Z^4 t^2\right)} dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_Z^2}\left(Z-(\mu_Z+\sigma_Z^2 t)\right)^2+\mu_Z t+\frac{\sigma_Z^2 t^2}{2}} dz \\
&= e^{\mu_Z t+\frac{\sigma_Z t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_Z^2}\left(Z-(\mu_Z+\sigma_Z^2 t)\right)^2} dz \\
&= e^{\mu_Z t+\frac{\sigma_Z^2 t^2}{2}},
\end{aligned}
$$

dengan μ_Z dan σ_Z masing-masing adalah rata-rata dan simpangan baku peubah acak Z, sehingga fungsi pembangkit momen dari Z adalah

$$M_Z(t) = E[e^{Zt}] = e^{\mu_Z t+\frac{\sigma_Z^2 t^2}{2}}$$

$$M_Z(t) = E[e^{Zt}] = e^{\ln S_0+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)Tt+\frac{1}{2}\sigma^2 Tt^2}. \tag{17}$$

X berdistribusi lognormal dengan

$$X = e^Z,$$

sehingga

$$E[X^t] = E[(e^Z)^t] = E[e^{Zt}] = e^{\ln S_0+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)Tt+\frac{1}{2}\sigma^2 Tt^2}$$

dan jika t bernilai 1 maka

$$
\begin{aligned}
E[X] &= e^{\ln S_0+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\frac{1}{2}\sigma^2 T} \\
&= e^{\ln S_0+\mu T-\frac{\sigma^2}{2}T+\frac{1}{2}\sigma^2 T} \\
&= e^{\ln S_0+\mu T} \\
&= e^{\ln S_0+\ln e^{\mu T}} \\
&= e^{\ln S_0 e^{\mu T}} \\
E[X] &= S_0 e^{\mu T} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Pendekatan harga opsi menggunakan metode CV diberikan dengan rumus pada persamaan (16) sebagai berikut [1]:

Pendekatan CV : $\hat{\mu}_k = Y + k\,(X - E[X])$.

$$\hat{\mu}_{CV} = E[\hat{\mu}_k]e^{-rT} \tag{15}$$

dengan $\hat{\mu}_k$: harga opsi pada saat jatuh tempo dengan pendekatan CV
$\hat{\mu}_{CV}$: pendekatan nilai sekarang harga opsi.
Jadi, pendekatan nilai opsi dihitung dengan menggunakan simulasi CV menghasilkan nilai $\hat{\mu}_{CV}$.

5 HASIL NUMERIK

Penggunaan metode Monte Carlo dan teknik *control variate* ini memperhatikan tingkat *error* dari kedua metode tersebut, di mana *error* masing-masing metode diperoleh dari nilai mutlak selisih nilai eksak μ dan nilai pendekatan $\hat{\mu}$ dibagi dengan nilai eksaknya atau nilai analitik yang telah dihitung dengan menggunakan formula Black-Scholes, dan disebut sebagai *error* relatif

$$E = \frac{|\hat{\mu} - \mu|}{\mu}$$

dengan μ adalah nilai opsi yang diperoleh secara analitik dan $\hat{\mu}$ adalah nilai pendekatan opsi yang diperoleh dari masing-masing metode [6].

Untuk hasil numerik dari nilai opsi *call*, *put*, dan biner digunakan nilai parameter sebagai berikut:

$S_0 = \text{Rp } 4\,600$ $\quad K = \text{Rp } 4\,500$
$r = 0.075$ $\quad T = 1/2$
$\sigma = 0.1387$ $\quad Q = \text{Rp } 1\,000$ per kg.

Hasil penghitungan nilai opsi secara numerik dengan menggunakan *software* Scilab 5.2.2 ditunjukkan pada Tabel 1, Tabel 2 dan Tabel 3.

1. Opsi *call*

Berikut ini adalah hasil penghitungan numerik dalam penentuan nilai opsi *call* dengan parameter-parameter yang telah ditentukan sebelumnya dan disajikan dalam Tabel 1 di bawah ini:

Tabel 1
Hasil penghitungan numerik nilai opsi *call* tipe Eropa

n	Nilai opsi dengan Monte Carlo (MC)	*Error* relatif MC	Nilai opsi dengan *Control Variate* (CV)	*Error* relatif CV
10	278.0708	1.78×10^{-1}	280.1132	1.72×10^{-1}
100	327.4913	3.24×10^{-2}	348.13401	2.86×10^{-2}
1 000	348.5644	2.98×10^{-2}	337.087	4.06×10^{-3}
10 000	342.5347	1.20×10^{-2}	338.4662	1.83×10^{-5}

Dari hasil yang diperoleh dari penghitungan pendekatan opsi *call* pada tabel di atas menunjukkan bahwa nilai *error* relatif atau galat yang dihasikan dari metode Monte Carlo lebih besar dibandingkan galat yang dihasilkan metode *control variate*. Ini berarti bahwa nilai opsi *call* yang dihasilkan oleh metode CV lebih akurat daripada nilai opsi yang dihasilkan metode MC.

2. Opsi *put*

Dengan parameter yang sama, hasil penghitungan numerik dalam penentuan nilai opsi *put* ditujukkan pada Tabel 2 berikut ini:

Tabel 2
Hasil penghitungan numerik nilai opsi *put* tipe Eropa

n	Nilai opsi dengan Monte Carlo (MC)	*Error* relatif MC	Nilai opsi dengan *Control Variate* (CV)	*Error* relatif CV
10	241.476	7.28×10^{-1}	219.082	5.68×10^{-1}
100	86.18003	3.83×10^{-1}	113.1993	1.90×10^{-1}
1 000	144.8607	3.66×10^{-2}	141.7417	1.42×10^{-2}
10 000	139.2447	3.62×10^{-3}	139.8742	8.90×10^{-4}

Dari hasil yang diperoleh dari penghitungan pendekatan opsi *call* pada tabel di atas menunjukkan bahwa nilai *error* relatif atau galat yang dihasikan dari metode Monte Carlo lebih besar dibandingkan galat yang dihasilkan metode *control variate*. Ini berarti bahwa nilai opsi *put* yang dihasilkan oleh metode CV lebih akurat daripada nilai opsi yang dihasilkan metode MC.

3. Opsi biner

Dengan parameter yang sama, hasil penghitungan numerik dalam penentuan nilai opsi *put* ditujukkan pada Tabel 3 berikut ini:

Tabel 3
Hasil penghitungan nilai opsi *cash-or-nothing*

n	Nilai opsi dengan Monte Carlo (MC)	*Error* relatif MC	Nilai opsi dengan *control variate* (CV)	*Error* relatif CV
10	92.77435	6.20×10^{-1}	175.4881	2.81×10^{-1}
100	231.9359	4.99×10^{-2}	232.8145	4.63×10^{-2}
1 000	252.3462	3.36×10^{-2}	249.8238	2.33×10^{-2}
10 000	247.8003	1.50×10^{-2}	243.7542	1.54×10^{-3}

Hasil penghitungan dari ketiga tabel di atas menunjukkan bahwa galat yang dihasilkan dari penghitungan dengan menggunakan teknik *control variate*, lebih dekat dengan nol dibandingkan galat yang dihasilkan dari penghitungan dengan menggunakan metode MC. Sehingga menghitung nilai opsi dengan menggunakan teknik *control variate*, hasilnya akan lebih akurat dibandingkan dengan nilai opsi yang dihitung dengan menggunakan metode Monte Carlo biasa.

6 ILUSTRASI KEUNTUNGAN PETANI GABAH DENGAN DAN TANPA OPSI

Berikut adalah ilustrasi keuntungan petani gabah dengan dan tanpa menggunakan opsi. Untuk ilustrasi ini diasumsikan bahwa petani hanya mengeluarkan biaya untuk pembelian benih padi dan pupuk saja.

Misalkan seorang petani memiliki sawah dengan luas 1 ha. Dalam 1 ha sawah diperlukan 25 kg benih padi dengan harga Rp 6 000 per kg. 1 ha sawah diharapkan dapat menghasilkan 7-8 ton gabah. Misalkan panen 1 ha sawah menghasilkan 7 ton gabah, kemudian dikeringkan sehingga mengalami penyusutan berat sebesar 18%, sehingga gabah kering yang dihasilkan 1 ha sawah adalah 5.74 ton. Dalam menanam padi selama kurang lebih 6 bulan, petani memerlukan pupuk kandang 5 ton dengan harga Rp 1 000 per kg. Maka modal awal petani untuk menanam padi adalah sebagai berikut:

- Pembelian benih padi : 25 kg $\times$ Rp $6\ 000 =$ Rp $150\ 000$
- Pembelian pupuk kandang : $5\ 000$ kg $\times$Rp $1\ 000 =$ Rp $5\ 000\ 000$
- Total modal : Pembelian benih padi + Pembelian pupuk kandang =Rp $5\ 150\ 000$

Ilustrasi opsi *put* yang melakukan eksekusi opsi

Kasus 1. Petani Gabah tidak menggunakan opsi *put*

Misalkan seorang petani di enam bulan yang lalu menanam padi dan yakin bahwa harga gabah kering di pasar pada enam bulan setelah panen akan naik 13% seperti tahun lalu. Harga gabah di awal pada saat itu sebesar Rp 4 600 per kg. Misalkan enam bulan setelah petani menanam padi, harga gabah mengalami penurunan drastis dari harga Rp 4 600 per kg menjadi Rp 4 200 per kg. Maka untuk hasil panen pada tahun tersebut petani ini hanya memperoleh keuntungan sebagai berikut:

- Hasil panen : 5.74 ton $\times$ Rp $4\ 200$/kg $=$ Rp $22\ 974\ 000$
- Modal awal : Rp $5\ 150\ 000$
- Keuntungan : Rp $21\ 238\ 000 -$ Rp $5\ 150\ 000 =$ Rp $17\ 824\ 000$

Kasus 2. Petani Gabah menggunakan opsi *put*

Misalkan seorang petani saat ini menanam padi. Maka untuk mengantisipasi penurunan harga gabah, petani ini memutuskan untuk membeli opsi saat padi ditanam pada suatu perusahaan atau suatu pihak lain yang dalam hal ini disebut penjual opsi. Misalkan harga gabah sekarang sebesar Rp 4 600 per kg, dan misalkan pula kedua belah pihak, yakni petani dan pihak penjual opsi, telah sepakat untuk menetapkan harga *strike* dalam kontrak perjanjian opsi adalah sebesar Rp 4 500 per kg gabah kering. Setelah enam bulan lamanya, tiba waktu jatuh tempo perjanjian opsi, ternyata harga gabah di pasar turun menjadi Rp 4 200 per kg. Maka petani yang telah membeli opsi ini memiliki hak untuk mengeksekusi opsinya, yaitu berhak menjual gabahnya kepada pihak penjual opsi sebesar harga *strike* yang telah disepakati. Sehingga keuntungan yang diperoleh petani untuk hasil panen pada tahun tersebut adalah sebagai berikut:

- Hasil panen : 5.74 ton $\times$ Rp $4\,500$/kg $=$ Rp $25\,830\,000$
- Modal awal : Rp $5\,150\,000$
- Harga opsi : Rp 139.8742×5.47 ton $=$ Rp $765\,112$ (harga opsi per kg gabah kering diambil dari hasil perhitungan Tabel 3)
- Keuntungan : Rp $25\,830\,000 - (\text{Rp}\,5\,150\,000 + \text{Rp}\,765\,112) =$ Rp $19\,914\,888$

Dari kedua contoh kasus di atas dengan menggunakan parameter yang sama, dapat dilihat bahwa petani yang menggunakan opsi memperoleh lebih banyak keuntungan dibandingkan dengan petani yang tidak menggunakan opsi. Maka dengan opsi para petani bisa melindungi nilai gabahnya dan memiliki peluang untuk memperoleh keuntungan yang besar walaupun harga gabah tersebut tidak dapat dipastikan akan naik ataukah turun di masa depan.

Ilustrasi opsi *put* yang tidak melakukan eksekusi opsi

Selanjutnya dengan parameter dan modal awal yang sama akan ditunjukkan ilustrasi mengenai harga gabah yang tidak mengalami penurunan harga dan bahkan meningkat dari harga gabah di awal. Misalkan harga gabah kering pada waktu jatuh tempo meningkat menjadi Rp 4 700 per kg, sehingga tidak terjadi eksekusi opsi. Maka keuntungan hasil dari petani yang memiliki opsi dan tidak memiliki opsi adalah:

Kasus 3.

Petani memiliki opsi memiliki keuntungan sebagai berikut:

Hasil panen : 5.74 ton $\times$ Rp $4\,700$/kg $=$ Rp $26\,978\,000$

Modal awal : Rp $5\,150\,000$

Harga opsi : Rp 139.8742×5.47 ton $=$ Rp $765\,112$ (harga opsi per kg Gabah kering diambil dari hasil perhitungan Tabel 2)

Keuntungan : Rp $26\,978\,000 - (\text{Rp}\,5\,150\,000 + \text{Rp}\,765\,112) =$ Rp $21\,062\,888$.

Kasus 4.

Petani tidak menggunakan opsi memiliki keuntungan sebagai berikut:

Hasil panen : 5.74 ton $\times$ Rp 4700/kg $=$ Rp $26\,978\,000$

Modal awal : Rp $5\,150\,000$

Keuntungan : Rp $26\,978\,000 -$ Rp $5\,150\,000 =$ Rp $21\,828\,000$

Pada kasus 3 dan 4 di atas dapat dilihat bahwa petani yang memiliki opsi kemudian tidak mengeksekusi opsinya memiliki keuntungan yang lebih kecil namun tidak jauh berbeda dibandingkan petani yang tidak memiliki opsi pada saat harga gabah benar-benar menurun (perhatikan Kasus 1). Petani tidak begitu khawatir dengan harga gabah di masa depan karena menggunakan opsi *put*.

Ilustrasi opsi biner (*cash-or-nothing*) yang melakukan eksekusi opsi

Kasus *Cash-or-Nothing* dapat diilustrasikan sebagai berikut; misalkan petani di suatu daerah tidak berencana untuk menanam padi lagi dengan alasan bahwa pada panen tahun depan diyakini harga gabah kering akan menurun drastis. Tetapi pemerintah menginginkan para petani tersebut tetap menanam padi. Sehingga untuk itu, pemerintah menerbitkan opsi biner (*Cash-or-Nothing*) kepada petani dengan *strike price* sebagai batas bawah harga gabah kering apabila satu tahun ke depan memang benar akan terjadi penurunan drastis dari harga gabah tersebut. Jika *strike price* yang diberikan sebesar Rp 4 500 per kg dengan waktu jatuh tempo satu tahun, maka apabila harga gabah kering di pasar pada waktu jatuh tempo berada di bawah harga *strike price,* petani akan mendapatkan subsidi dari pemerintah sebesar Rp 1000 per kg. Sebaliknya, jika harga gabah kering di pasar tidak lebih kecil dari *strike price* yang telah disepakati, maka petani tidak mendapatkan apa-apa dari pemerintah. Misalkan nilai gabah kering saat transaksi pembelian opsi di awal sebesar Rp 4 600 per kg dan volatilitas saat itu adalah sebesar 13.58% per tahun, serta tingkat suku bunga bebes risiko 7.5% per tahun. Berikut parameter dari ilustrasi di atas:

$S_0 = Rp$ 4 600 per kg $K = Rp$ 4 500 per kg
$\sigma = 13.58\%$ $T = 1$ tahun
$Q = Rp$ 1 000 per kg $r = 7.5\%$

Petani yang membeli opsi biner tersebut harus membayar kepada penjual opsi dalam hal ini pemerintah, sebesar Rp 243.75 per kg gabah kering (lihat Tabel 3). Misalkan harga gabah kering pada waktu jatuh tempo benar-benar menurun sehingga mencapai harga di bawah *strike price,* misalkan Rp 4 200 per kg maka:

Kasus 5. Petani yang menggunakan opsi biner akan memperoleh keuntungan sebagai berikut:

Hasil panen : 5.74 ton $\times$ Rp 4 200 $=$ Rp 24 108 000
Total subsidi : 5.74 ton $\times$ Rp 1 000 $=$ Rp 5 740 000
Modal awal : Rp 5 150 000
Harga opsi : Rp 243.75 $\times$ 5.47 ton $=$ Rp 1 399 125 (harga opsi per kg gabah kering diambil dari hasil perhitungan Tabel 4)
Keuntungan : Rp 24 108 000 $+$ Rp 5 740 000 $-$ (Rp 5 150 000 $+$ Rp 1 399 125) $=$ Rp 23 298 875

Kasus 6. Petani yang tidak menggunakan opsi biner akan memperoleh keuntungan sebagai berikut:

Hasil panen : 5.74 ton $\times$ Rp 4 200/kg $=$ Rp 24 108 000
Modal awal : Rp 5 150 000
Keuntungan : Rp 24 108 000 $-$ Rp 5 150 000 $=$ Rp 18 958 000.

Pada kasus 5 dan 6, keuntungan yang diperoleh petani yang memiliki opsi lebih besar daripada keuntungan yang diperoleh petani yang tidak memiliki opsi.

Ilustrasi opsi biner (*cash-or-nothing*) yang tidak melakukan eksekusi opsi

Misalkan harga gabah kering pada waktu jatuh tempo tidak mengalami penurunan harga dari harga semula sehingga harga gabah kering di atas *strike price*, maka tidak terjadi eksekusi opsi biner. Misalkan harga gabah di pasar saat jatuh tempo adalah sebesar Rp 4 700 per kg maka:

Kasus 7. Petani yang memliki opsi akan memperoleh keuntungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\text{Keuntungan} &= \text{hasil panen} + \text{total subsidi} - (\text{modal awal + harga opsi}) \\ &= \text{Rp } 26\,978\,000 + 0 - (\text{Rp } 5\,150\,000 + \text{Rp } 1\,399\,125\,) \\ &= \text{Rp } 20\,428\,875.\end{aligned}$$

Kasus 8. Petani yang tidak memiliki opsi akan memperoleh keuntungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\text{Keuntungan} &= \text{hasil panen} - \text{modal awal} \\ &= \text{Rp } 26\,978\,000 - \text{Rp } 5\,150\,000 = \text{Rp } 21\,828\,000.\end{aligned}$$

Pada kasus 7 dan 8, perbedaan keuntungan petani yang menggunakan opsi hanya sebesar harga opsi, yang tidak begitu besar perbandingannya seperti kasus 5 dan 6. Sehingga dapat dipastikan bahwa risiko kerugian petani yang menggunakan opsi tersebut kecil.

7 SIMPULAN

Pada penelitian ini dapat ditunjukkan bagaimana peran kedua metode numerik, Monte Carlo dan teknik *control variate*, dalam menentukan harga opsi tipe Eropa untuk beberapa jenis opsi. Dengan menggunakan bilangan acak yang menyebar normal baku seperti yang dilakukan dalam metode Monte Carlo standar, harga opsi dapat ditentukan dengan mudah. Selanjutnya, dengan menambahkan metode teknik *control variate* dalam simulasi Monte Carlo standar yang digunakan dalam penghitungan harga opsi, dihasilkan nilai galat yang lebih kecil dibandingkan dengan hanya menggunakan penghitungan nilai opsi dengan metode MC. Dengan kata lain, galat yang dihasilkan lebih dekat dengan nol. Ini berarti bahwa dengan teknik *control variate* solusi numerik lebih akurat dibandingkan hanya dengan menggunakan metode Monte Carlo. Dengan ini, petani dapat dengan mudah menggunakan opsi dan menghitung nilainya untuk melindungi nilai gabah dan mendapatkan banyak keuntungan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adewunmi A, Aickelin U. 2013. *Investigating the Effectiveness of Variance Reduction Techniques.* Nottingham NG8 1BB, UK.

[2] Ameur HB, dkk. 1999. *Variance Reduction of Monte Carlo and Randomized Quasi-Monte Carlo Estimators for Stochastic Volatility Models in Finance*. Winter Simulation Conference: Canada.

[3] Baure KW, Wilson J. 1992. *Control Variate Selection Criteria. Noval Research Logistics.* 39(3): 307-321.

[4] Boyle P, dkk. 1997. *Monte Carlo Methods for Security Pricing. Journal of Economic Dynamics and Control.* 21: 1267-1321.

[5] Davidson J, dkk. 2013. *Partical Control Variate for Agent Evaluation in Zero-Sum Domains.* International Foundation for Autonomous Agent and Multiagent Systems, USA.

[6] Dincer K. 2007. *Option pricing by simulation.* Istanbul (TR): Istanbul Technical University.

[7] Glasserman P. 2010. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer Science + Business Media Inc, New York.

[8] Greensmith E, dkk. 2004. *Variance Reduction Techniques for Gradient Estimates in Reinforcement Learning. Journal of Machine Learning Research.* 5: 1471-1530.

[9] Haugh M. 2004. *Variance reduction methods I. Jurnal IEOR.* E470.

[10] Hull J, A White. 1988. *The use of control technique in option pricing. Jurnal of Financial and Quantitative Analysis*. 23(3): 237-251.

[11] Hull J. 2012. *Options, Futures, And Other Derivatives (Eight Edition).* Pearson Education Inc, USA.

[12] Liu G, dkk. 2015. *A Simple Control Variate Method for Option Pricing with Stochastik Volatility Models. IAENG international Journal of Applied Mathematics*. 44:1, IJAM 45.1.07.

[13] Niwiga DB. 2005. *Numerical method for valuation of financial derivatives*. South Africa (tZA): University of Werstern Cape.

[14] Ross SM. 1996. *Sthochastic Process.* John Wiley & Son Inc: New York.