SOLUSI SEMI-ANALITIK PERSAMAAN LAPLACE DENGAN SYARAT BATAS CAMPURAN

I. MAULIDI[1], A. D. GARNADI[2], M. N. INDRO[3], M. T. JULIANTO[2], A. PRIBADI[4]

Abstrak

Solusi analitik dari distribusi potensial dalam bola 3 Dimensi dengan 7 syarat batas campuran berasal dari model fisika didapatkan sebagai sistem persamaan linear tak hingga. Masalah syarat batas campuran ini, berasal dari Tomografi Elektrik yang dikenal sebagai *Complete Electrode Model* (Model Elektroda Lengkap).

Kata kunci*:* pemindai kepala, *complete electrode model*, tomografi elektrik

1 PENDAHULUAN

Tomografi Elektrik merupakan salah satu moda elektrik pemindai non-destruktif di bidang aplikasi. Tujuan tulisan ini adalah mendapatkan solusi untuk persamaan Laplace homogen yang merupakan satu bentuk persamaan diferensial parsial Eliptik.

Secara umum, masalah syarat batas campuran tergolong hal sangat jarang dibahas meskipun banyak masalah dibidang rekayasa melibatkan masalah insulasi (tanpa fluks di batas) yang berakibat mempersyaratkan kondisi di batas bersifat campuran. Misalnya saja, buku sumber yang cukup komprehensif untuk solusi persamaan differensial parsial untuk masalah rekayasa, sedikitpun tidak membahas syarat batas campuran [4]. Beberapa peneleti mencoba mendapatkan solusi analitik untuk masalah EIT di cakram 2D yang menggunakan CEM, misalnya [7], [5], dan [6]. Bahkan, hasil yang ekivalen untuk masalah 3D tak didapati untuk model CEM [6]. Solusi persamaan Laplace di bola 3D homogen diturunkan pada tulisan ini, yang memenuhi syarat batas CEM dengan konfigurasi khusus berjumlah elektroda hingga dan impedansi kontak berbeda padanya, solusi dinyatakan sebagai sistem persamaan linear takhingga. Solusi persamaan Laplace homogen pada cakram dalam koordinat polar merupakan hal yang sederhana untuk didapatkan, meskipun demikian untuk model elektroda lengkap merupakan hal yang tidak mudah dari segi matematis karena syarat batas yang digunakan merupakan syarat batas campuran ([3], [6]), apalagi untuk model di bola 3 dimensi. Dengan demikian, melengkapi hasil [6], meskipun untuk kasus khusus. Penurunan formulasi solusi secara rinci diberikan di Lampiran.

---

[1] Departemen Matematika, Institut Tekologi Sumatera.
[2] Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.
[3] Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.
[4]STEI, Institut Teknologi Bandung.

2 PERUMUSAN UMUM MASALAH EIT

Tujuan dari Electrical Impedance Tomography ialah merekonstruksi permittivity spasial $\varepsilon(s)$ berdasarkan pengukuran arus dan voltase pada electrode yang ditempatkan di tepi/permukaan benda, dengan s menyatakan vektor koordinat spatial. Dalam sistem EIT, voltase merupakan bagian dari syarat batas dan arus yang terjadi merupakan objek yang diukur. Seringkali masalah EIT dirumuskan untuk $\varepsilon(s)$ yang bernilai kompleks, meski demikian dalam tulisan ini dibatasi hanya untuk bernilai real sehingga bagian imajiner tak ada. Di 3D kita punyai $s = (x, y, z)$ untuk medium homogen $\varepsilon(s)$ yang konstan. Sepanjang tulisan ini, huruf tebal menyatakan vektor dan matriks. Di bagian ini, kita nyatakan forward problem bila fungsi ε diketahui.

2.1 Persamaan Laplace dalam Benda

Misalkan di permukaan benda terdapat L electroda yang melekat dan tidak saling bertumpang tindih E_i, $i = 1, 2, ..., L$. Potensial $U_1, U_2, ..., U_L$ dikenakan pada elektroda sehingga dipenuhi kondisi $\sum_{i=1}^{L} U_i = 0$. Di dalam benda, distribusi potensial dipenuhi oleh persamaan Laplace :

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla u) = 0 \qquad (1)$$

Tujuan forward model adalah menemukan fungsi potensial u, diberikan $\varepsilon = \varepsilon(s)$ mempergunakan syarat batas sebagaimana diberikan di bawah ini.

2.2 Syarat Batas

Pemodelan EIT dibedakan berdasarkan syarat batas pada elektroda, persamaan (1) tetap sama. Pada batas benda antar elektroda, dianggap tak ada arus yang mengalir,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \mathbf{s} \neq E_i, \qquad (2)$$

dengan ν menyatakan vektor arah normal di permukaan. Menurut CEM,

$$u(s) + Z_i \varepsilon(s) \frac{\partial u}{\partial \nu} = U_i, \mathbf{s} \in E_i \qquad (3)$$

dengan Z_i merupakan impedansi kontak (atau permukaan), $i = 1, 2, ..., L$. Merupakan hal yang umum dianggap bahwa impedansi kontak bernilai konstan di permukaan elektrode tetapi bisa bernilai berbeda untuk masing-masing elektrode. Potensial yang diberikan bernilai konstan di permukaan elektrode karena dianggap terbuat dari bahan metal yang bersifat sangat konduktif. Model (1) bersama-sama dengan syarat batas (2) dan (3), dengan tepat mencerminkan rancangan perangkat pengukuran dan merupakan forward model yang paling komprehensif dari masalah impedansi elektrik ([2], [1]).

3 BOLA HOMOGEN 3D

Pada bagian ini, akan diturunkan sebuah solusi analitik dari model elektrode lengkap (CEM, *complete electrode model*) di bola 3D yang homogen dalam koordinat bola dengan jumlah hingga elektrode yang memenuhi CEM.

Distribusi potensial di bola berjejari R yang homogen dengan permitivitas ε memenuhi persamaan Laplace dalam koordinat bola. Sebagai hal khusus dari persamaan diferensial parsial (1),

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]=0 \tag{4}$$

dengan $0 \leq r \leq R$ menyatakan jarak dari titik pusat, $0 \leq \varphi < 2\pi$ dan $0 < \theta \leq \pi$ sudut. Diasumsikan bahwa setiap variabel bernilai real. Dalam hal ini, elektrode yang tidak saling menimpa sebanyak L, dengan lebar $2w$ dan panjang $2w$ (keduanya dalam radian) ditempatkan di lingkaran dengan radius R pada sudut $\{\varphi_i, i = 1, 2, ..., L\}$. Dengan menggunakan metode pemisahan variabel [9] akan memberikan solusi umum yang dinyatakan dalam bentuk deret sebagai berikut

$$u(r,\theta,\phi)=u_0+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{l}\left(A_l\left(\frac{r}{R}\right)^l+B_l\left(\frac{r}{R}\right)^{-l-1}\right)[S_n\cos(n\phi)+C_n\sin(n\phi)]P_l^n(\cos(n\theta)). \tag{5}$$

Karena $\frac{\partial u}{\partial r} < \infty$ untuk $r = 0$, maka solusi persamaan (5) dapat dituliskan

$$u(r,\theta,\phi)=u_0+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{l}\left(\frac{r}{R}\right)^l[C_{nl}\cos(n\phi)+D_{nl}\sin(n\phi)]P_l^n(\cos(n\theta)). \tag{6}$$

dengan koefisien C_{nl} dan D_{nl} yang dapat diperoleh dari syarat batas (3), untuk kasus bola 3D, akan berbentuk

$$u(R,\theta,\phi)+Z_i\varepsilon\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R}=U_i, i=1,2,...,L, \quad |\phi-\phi_i|<w, \quad |\theta-\hat{\theta}|<\hat{w}. \tag{7}$$

dengan θ tetap.

Perhatikan bahwa persamaan (7) merupakan fungsi dari θ dan φ tetapi dengan ruas kanan yang konstan. Sebagaimana diperlihatkan di Lampiran, koefisien a_n dan b_n diperoleh dengan cara mengintegrasikan $\varepsilon \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{r=R}$ untuk $(\varphi, \theta) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ sebagai solusi sistem persamaan linear tak hingga:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\\ u_0\end{bmatrix}=\left(\pi\varepsilon R^{-1}\mathbf{N}+\sum_{i=1}^{L}Z_i^{-1}\mathbf{M}_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{L}Z_i^{-1}U_i\mathbf{r}_i\right), \tag{8}$$

dengan a dan b koefisien Fourier dari vektor dimensi takhingga yang dicari, $n = (1, 2, 3, ...)$, dan matriks dan vektor dimensi tak hingga yang didefinisikan sebagai berikut

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11i} & \mathbf{M}_{12i} & \mathbf{r}_{1i} \\ \mathbf{M}_{12i}^T & \mathbf{M}_{22i} & \mathbf{r}_{2i} \\ \mathbf{r}_{1i}^T & \mathbf{r}_{2i}^T & 2w \end{bmatrix}; \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1i} \\ \mathbf{r}_{2i} \\ 2w \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \mathbf{r}_{1i} = 2\mathbf{n}^{-1}\sin(w\mathbf{n})\cos(\phi_i\mathbf{n}) \\ \mathbf{r}_{2i} = 2\mathbf{n}^{-1}\sin(w\mathbf{n})\sin(\phi_i\mathbf{n}) \end{matrix}.$$

Untuk hal yang khusus, bila impedans kontak sama, $Z_i = Z$ dan jarak elektroda ke elektroda satu sama lain sama ($\varphi_i = 2\pi i/L$), didapat $u_0 = 0$ dan

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left(\pi\varepsilon Z R^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{n} & 0 \\ 0 & \mathbf{n} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{L} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11i} & \mathbf{M}_{12i} \\ \mathbf{M}_{12i}^T & \mathbf{M}_{22i} \end{bmatrix}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{L} U_i \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1i} \\ \mathbf{r}_{2i} \end{bmatrix}\right). \quad (9)$$

Tentu saja apabila untuk perhitungan, dimensi takhingga haruslah diganti dengan dimensi hingga sebagai hampiran.

4 UCAPAN TERIMA KASIH

Pekerjaan ini didanai oleh Kemenristekdikti melalui skim PUPT-IPB dengan kontrak nomor 079/SP2H/LT/DRPM/II/2016.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Cheney M, Isaacson D, Newell JC. 1999. Electrical impedance tomography. SIAM Review. 41:85-101.

[2] Cheng KS, Isaacson D, Newell JC, Gisser DG. 1989. Electrode models for electric current computed tomography. IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 36:918-924.

[3] Duffy DG. 2008.. Mixed Boundary Value Problems. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC.

[4] Polyanin AD. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and cientists. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC.

[5] Paulson K, Brekon W, Pidcock M. 1992. Electrode modeling in electrical impedance tomography. SIAM Journal on Applied Mathematics. 52:1012-1022.

[6] Pidcock MK, Kuzuoglu M, Leblebicioglu K. 1995 Analytic and semi-analytic solutions in electrical impedance tomography: I. Two-dimensional problems. Physiological Measurement. 16:77-90.

[7] Somersalo E, Cheney M, Isaacson D. 1992. Existence and uniqueness for electrode models for electric-current computed tomography. SIAM Journal on Applied Mathematics. 52:1023-1040.

[8] Weisstein, Eric W. "Laplace's Equation--Spherical Coordinates." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/LaplacesEquationSphericalCoordinates.html.

Lampiran. Penurunan Solusi EIT masalah 3D

Tujuan kita adalah mendapatkan koefisien Fourier a_n, b_n dari persamaan (6). Dengan menggunakan persamaan (7), turunan di batas kita nyatakan dalam bentuk

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = \begin{cases} U_i/Z_i - u(R,\phi,\theta)/Z_i, & \text{jika } |\phi-\phi_i|<w, |\theta-\hat{\theta}|<\hat{w} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \tag{10}$$

Kemudian, kita kalikan persamaan (10) dengan $cos(k\varphi)$ with k = 1, 2, ... dan diintegrasikan kedua sisinya di selang (0, 2π) dengan memperhatikan

$$\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = \frac{1}{R}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{l} l(C_{nl}\cos(n\phi)+D_{nl}\sin(n\phi))P_l^n(\cos(\theta))$$

Jelas bahwa integral ruas kiri (10) dikalikan cos($k\varphi$), sebagai integral dari deret Fourier, ialah $\varepsilon\pi n a_n/R$ diakibatkan sifat ortogonal fungsi kosinus dan sinus (k = n). Ruas kanan persamaan (10) dikalikan $cos(k\varphi)$ berbentuk

$$\sum_{i=1}^{L} U_i/Z_i\int_{\phi_i-w}^{\phi_i+w}\cos(k\phi)d\phi -$$
$$\sum_{i=1}^{L}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{l}\left[C_{nl}\int_{\phi_i-w}^{\phi_i+w}V_{kn1}(\phi)d\phi + D_{nl}\int_{\phi_i-w}^{\phi_i+w}V_{kn2}(\phi)d\phi\right]P_l^n(\cos(\theta)),$$

dengan

$$V_{kn1}(\phi)=\cos(k\phi)\cos(n\phi), \quad V_{kn2}(\theta)=\cos(k\phi)\sin(n\phi).$$

Dari trigonometri,

$$\int_{\phi_i-w}^{\phi_i+w}\cos(k\phi)d\phi = \tfrac{2}{k}\sin(wk)\cos(\phi_i k),$$

dan misalkan M_{11i} dan M_{12i} merupakan matriks Fourier dimensi tak hingga untuk i = 1, 2, ..., L dg elemen ke-(k,l) diberikan melalui

$$\begin{aligned} M_{11ikl} &= \sum_{n=1}^{l} P_l^n(\cos\theta)\int_{\phi_i-w}^{\phi_i+w}\cos(k\phi)\cos(n\phi)d\phi \\ &= \left(w+\frac{1}{2k}\cos(2kw_i)\sin(2kw)\right)P_l^n(cos\theta)I_{(n=k)} + \\ &\quad \sum_{n=1,n\neq k}^{l}\left(\frac{1}{n-k}A_{1kn}+\frac{1}{n+k}B_{1kn}P_l^n(\cos(\theta))\right) \end{aligned}$$

dengan

$$A_{1kn}=\cos((n-k)\phi_i)\sin((n-k)w), \quad B_{1kn}=\cos((n+k)\phi_i)\cos((n+k)w),$$

$I_{(n=k)}$ menyatakan fungsi Indikator.

$$\begin{aligned} M_{12ikl} &= \sum_{n=1}^{l} P_l^n(\cos\theta)\int_{\phi_i-w}^{\phi_i+w}\cos(k\phi)\sin(n\phi)d\phi \\ &= \left(\frac{1}{2k}\sin(2k\phi_i)\sin(2kw)\right)P_l^n(\cos\theta)I_{(n=k)} + \\ &\quad \sum_{n=1,n\neq k}^{l}\left(\frac{A_{2kn}}{n+k}+\frac{B_{2kn}}{n-k}\right)P_l^n(\cos\theta), \end{aligned}$$

dengan

$$A_{2kn} = \sin((n+k)\phi_i)\sin((n+k)w), \quad B_{2kn} = \sin((n-k)\phi_i)\sin((n+k)w).$$

Langkah berikutnya, perkalikan kedua ruas dari persamaan (10) dengan *sin*($k\varphi$) dan diintegralkan untuk variabel $\varphi \in (-\varphi, \varphi)$ berdasarkan fakta bahwa

$$\int_{\phi_i-w}^{\phi_i+w} \sin(k\phi)d\phi = \frac{2}{k}\sin(wk) + \sin(\phi_i k),$$

koefisien untuk C_{nl} dan D_{nl} adalah

$$M_{21ikn} = M_{12ikn},$$

$$M_{22ikn} = P_l^k(\cos\theta)\left(w - \frac{1}{2k}\cos(2k\phi_i)\sin(2kw)\right) I_{(n=k)} + \sum_{n=1,n\neq k}^{l}\left(\frac{A_{1kn}}{n-k} - \frac{B_{1kn}}{n+k}\right) P_l^n(\cos\theta).$$

Tuliskan dengan a dan b vektor dimensi takhingga dengan komponen secara berturut-turut C_{nl} dan D_{nl}. Juga tetapkan r_{1i} and r_{2i} vektor dimensi takhingga dengan komponen

$$r_{1in} = \frac{2}{n}\sin(w\mathbf{n})\cos(\phi_i n), \qquad r_{2in} = \frac{2}{n}\sin(w\mathbf{n})\sin(\phi_i n)$$

Kita nyatakan suku $(\pi\varepsilon/R)n$ pada koefisien C_{nl} dan D_{nl} sebagai sebuah diagonal matriks $(\pi\varepsilon/R)n$ dengan $n = diag(1, 2, 3, ...)$. Untuk mendapatkan persamaan yang memuat u_0, persamaan (10) diintegralkan keduaruasnya di $(0,2\pi)$ yang menghasilkan

$$\mathbf{a}'\sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}\mathbf{r}_{1i} + \mathbf{b}'\sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}\mathbf{r}_{1i} + 2wu_o\sum_{i=1}^{L} 1/Z_i = 2w\sum_{i=1}^{L} U_i/Z_i,$$

sehingga sistem persamaan lengkap untuk diselesaikan bagi **a**, b dan u_0 sebagai berikut:

$$\left(\sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}\mathbf{M}_{11i}\right)\mathbf{a} + \left(\sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}\mathbf{M}_{12i}\right)\mathbf{b} + (\pi\varepsilon/R)n\mathbf{a} + \mathbf{u}_0\sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}\mathbf{r}_{11} = \sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}U_i\mathbf{r}_{11}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}M_{21i}^T\right)\mathbf{a} + \left(\sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}\mathbf{M}_{22i}\right)\mathbf{b} + (\pi\varepsilon/R)n\mathbf{b} + \mathbf{u}_0\sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}\mathbf{r}_{21} = \sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}U_i\mathbf{r}_{21}$$

$$\mathbf{a}'\sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}\mathbf{r}_{11} + b'\sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}\mathbf{r}_{11} + 2wu_0\sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1} = 2w\sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}U_i.$$

Ruas kanan dari persamaan ketiga jelas akan bernilai nol karena jumlah voltase yang diberikan adalah nol, sehingga cukup dibuktikan $\sum_{i=1}^{L} r_{1in} = 0$ dan $\sum_{i=1}^{L} r_{2in} = 0$ yang berasal dari fakta bahwa

$$\sum_{i=1}^{L}\cos\frac{2\pi i}{L}n = 0, \qquad \sum_{i=1}^{L}\sin\frac{2\pi i}{L}n = 0$$

untuk setiap n = 1, 2, ... Jelas, solusi sistem di atas dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari voltase terukur dalam bentuk

$$a_n = \sum_{i=1}^{L} U_i Z_i^{-1} p_{1in}, \qquad b_n = \sum_{i=1}^{L} U_i Z_i^{-1} p_{2in}$$

dengan p_{1in} dan p_{2in} merupakan unsur vektor berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{1i} &= \mathbf{M}^{11}\mathbf{r}_{1i} + \mathbf{M}^{12}\mathbf{r}_{2i} + 2w\mathbf{M}^{13}, \\ \mathbf{p}_{2i} &= \mathbf{M}^{21}\mathbf{r}_{1i} + \mathbf{M}^{22}\mathbf{r}_{2i} + 2w\mathbf{M}^{23}, \end{aligned}$$

dan matriks $\mathbf{M}^{pq}$ adalah matriks blok-terpartisi dari matriks invers di persamaan (8) terkait **a**, **b** dan u_0.